面積の極限に関するちょっと難しい問題

問題 1

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}|\sin nx-\sin x|dx$$

を求めよ．

［解］$n=10$ の場合を図示してみると，図 1 の斜線部分のようになる．

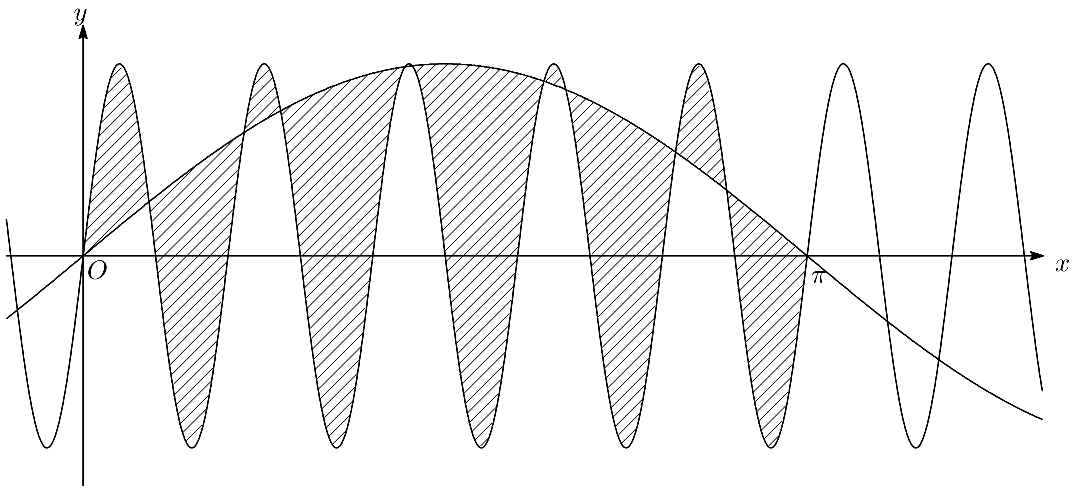

図 1

このうち x 軸より下の部分を x 軸の上の部分に移動し，重ならないように適当に配置すると，図 2 のようになる．n が奇数のときはこのようにきれいにはいかないのだが，極限を求めるに際しては問題とならないのでこのまま議論を進めることにする．

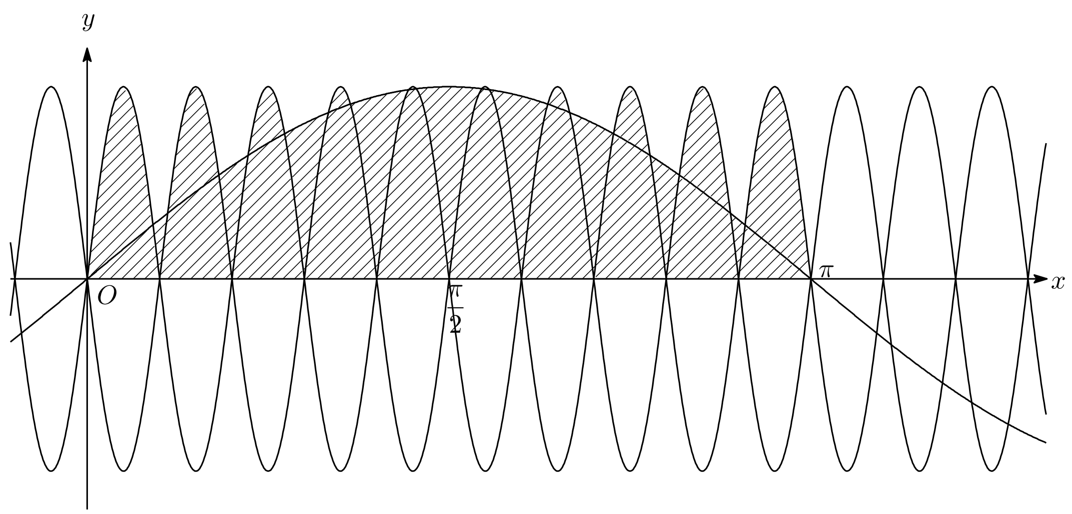

図 2

このうち x 軸と $y=\sin x$ で囲まれた部分の面積は n にかかわらず 2 であり，この部分を除くと，図 3 のよう

になる．

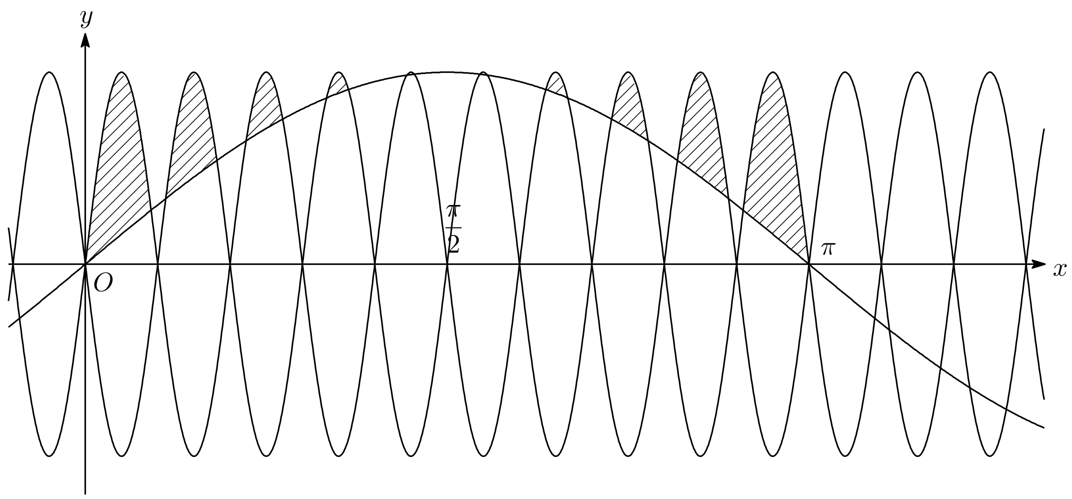

図 3

この n 個の斜線部分の面積 S を求める．この n 個の斜線部分のうち左から k 番目 $\left(k \leq \dfrac{n}{2}\right)$ の面積は近似的に

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{n}\left(\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ dx - \frac{\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{n} + \frac{k\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n}\right) \\
=&\frac{2}{n}\left(\cos\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{n} + \frac{k\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n}\right) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

である．この面積の $k=1$ から $k=\dfrac{n}{2}$ の場合までの和を求め，その極限を求め, さらにそれを 2 倍すればよい．まず (1) の第 1 項から見てみよう．

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\frac{2}{n}\cos\frac{k\pi}{n} &= 2\int_0^{\frac{1}{2}}\cos\pi x dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx = \frac{2}{\pi} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

続いて第 2 項は

$$
\begin{aligned}
-\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\frac{2}{n}\sin\frac{k\pi}{n} &= -\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\sin\pi x dx \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx = -1 \qquad (3)
\end{aligned}
$$

最後に第 3 項は部分積分を用いて

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\frac{2}{n}\cdot\frac{k\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n} &= 2\int_0^{\frac{1}{2}}\pi x\sin\pi x dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = \frac{2}{\pi} \qquad (4)
\end{aligned}
$$

(2),(3),(4) を足しそれを 2 倍し，そしてあらかじめ求めてあった 2 を加えると

$$2\left(\frac{2}{\pi}-1+\frac{2}{\pi}\right)+2=\frac{8}{\pi}\cdots Ans.$$

最初の予想は $\dfrac{\pi}{2}+1$ であったが，その予想は外れた．答の美しさから察すると，やはり背景があるものと思われる．ためしに

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi\left|\sin nx-\frac{1}{2}\sin x\right|dx$$

を計算してみたが，楕円積分が出てきたのであきらめた．

ちなみに

$$S_2=\frac{5}{2},S_3=\frac{8\sqrt{2}-4}{3},S_4=\frac{5\sqrt{5}-1}{4},S_5=\frac{12\sqrt{3}-8}{5}$$

となった．これらの $\dfrac{1}{8}$ の逆数をとると，

$$3.2,\to 3.2815,\to 3.1433135\to 3.12876192$$

となるので，割と速く π に収束するのであろうか？

さて，$\sin nx=sinx$ は容易に解けないであろうと思っていたが，和積の公式を使って意外に容易に解けそうなので，次の問題を起こしておく．

問題 2 n が正の奇数のとき，方程式 $\sin nx=sinx$ を解け．

［解］$n=2m+1\quad(m\geq 1)$ とすると問題の方程式は

$$\sin(2m+1)x-\sin x=0$$

和積の公式を使って

$$\cos(m+1)x\sin mx=0$$

これを満たす x は，$\pm i$ の $m+1$ 乗根と，± 1 の m 乗根の偏角がその全てである．つまり，任意の正数 k を用いて，

$$x=\frac{\pi}{2(m+1)}+\frac{2k\pi}{m+1},\frac{3\pi}{2(m+1)}+\frac{2k\pi}{m+1},\frac{2\pi}{m}+\frac{2k\pi}{m},\frac{\pi}{m}+\frac{2k\pi}{m}$$

整理すると，

$$x=\frac{(4k+1)\pi}{2(m+1)},\frac{(4k+3)\pi}{2(m+1)},\frac{(2k+2)\pi}{m},\frac{(2k+1)\pi}{m}$$

任意の整数 j を用いて

$$x=\frac{(2j+1)\pi}{2(m+1)},\frac{j\pi}{m}$$

1 周期の間で調べると，最初の解については

$$j=0,1,2,\cdots,2m+1$$

の $2m+2$ 個の解がある．また，右側の解について言えば，

$$j=0,1,2,\cdots,2m-1$$

の $2m$ 個の解がある．あわせて $4m+2$ 種類の解があることになる．しかしながら，これらの中で重複するものがあり得るので，この個数より少なくなることもあるわけである（図 4）．$n=11$ などの場合は解が重複しない（図 5）．どのような場合に重複するのかは整数論の議論となるので，ここではこのくらいにしておこうと思う．この結果を用いて問題 1 を解くことも考えられるが，これもやめておこう

．

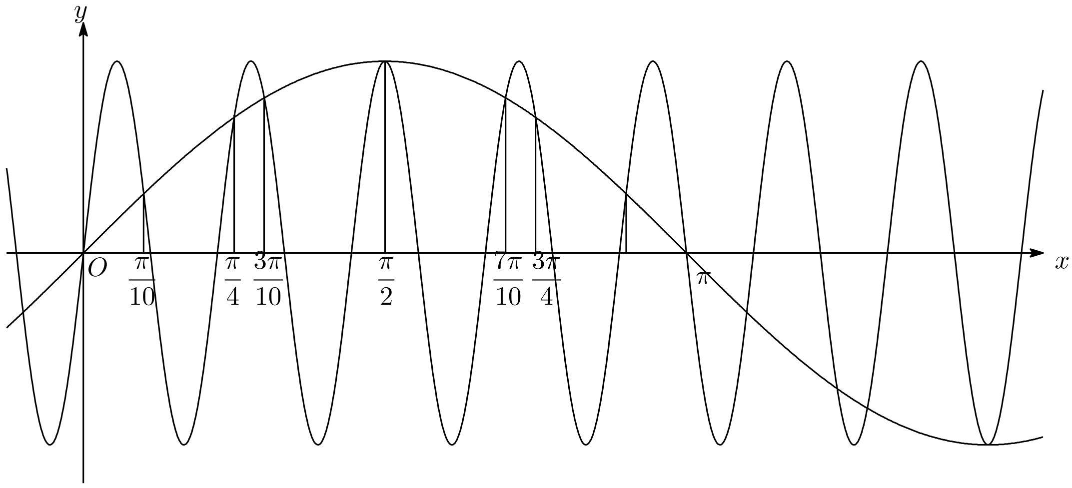

図 4

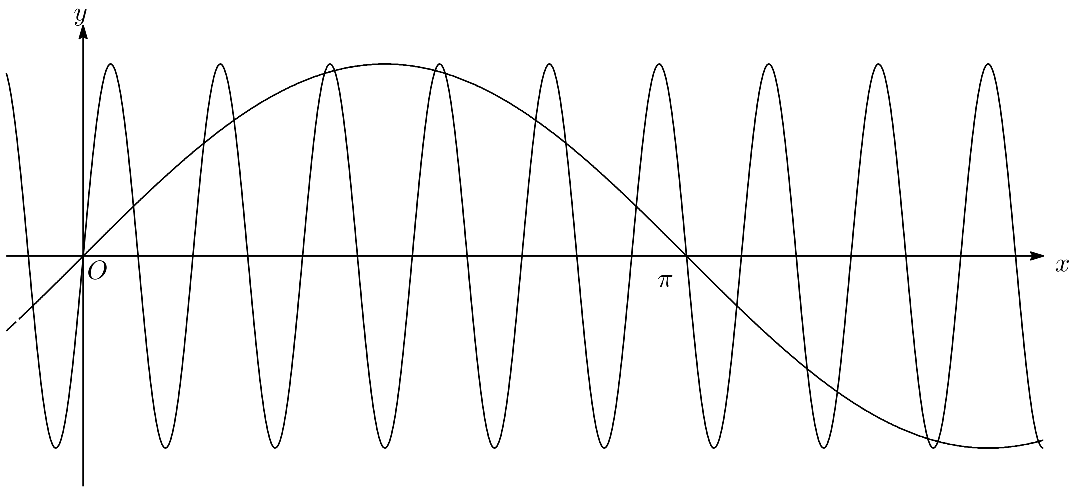

図 5