垂足線 (Pedal Curve)

定義 1 定曲線 g の動接線 l に，定点 O から下す垂線の足 P の軌跡 f を，O に関する g の**垂足曲線 (pedal curve)** と呼ぶ.

円の垂足曲線はパスカルの蝸牛線 (リマソン) である（図 1）．定点 O が円周上にあるときはカージオイドとなる.

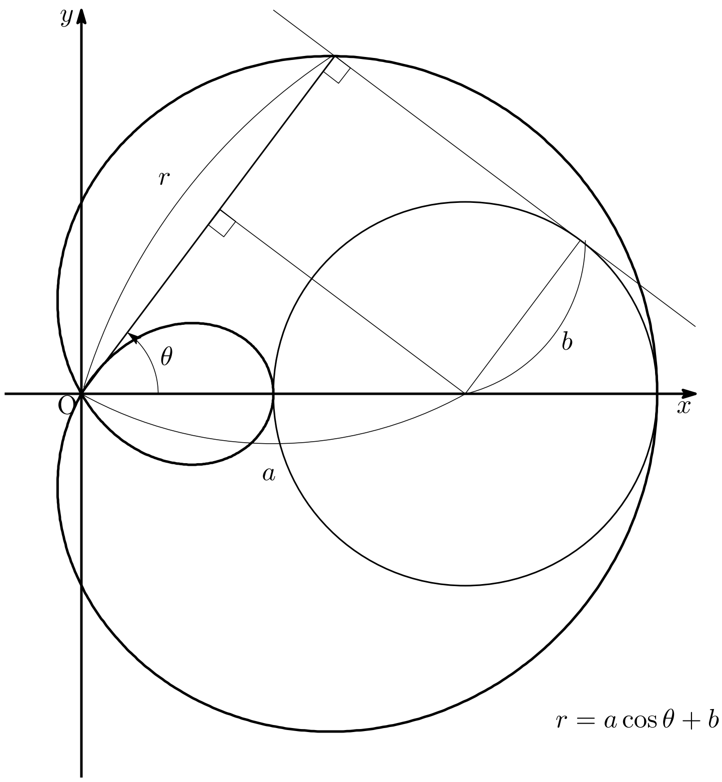

図 1

問題 1 直角双曲線

$$x^2 - y^2 = 1$$

の原点に関する垂足曲線を求めよ.

［解］図形的に解けないこともないが，定義にそって計算で解いてみよう.

双曲線上の点 (t, u) における接線は

$$tx - uy = 1 \tag{1}$$

原点を通りこの接線と垂直な線は

$$ux + ty = 0 \tag{2}$$

(1),(2) より u を消去すると，

$$t(x^2 + y^2) = x \tag{3}$$

t を消去すると

$$u(x^2+y^2)=-y \tag{4}$$

(4) より

$$t^2(x^2+y^2)^2=x^2 \tag{5}$$

(3) より

$$u^2(x^2+y^2)^2=y^2 \tag{6}$$

(5),(6) および $t^2-u^2=1$ より

$$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2 \tag{7}$$

(7) は題意を満たすための必要条件でしかないので，逆を調べなければならないが，ここでは省略する．(7) は **レムニスケート (連珠形 lemniscate)** である（図 2）．図形的に解く場合は $OA\cdot OB=2$ を用いる．

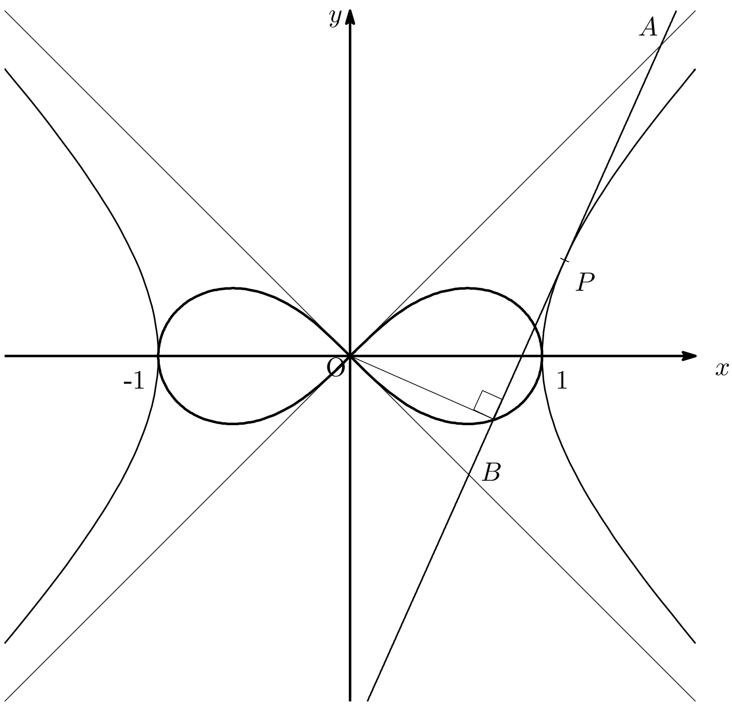

図 2

問題 2 楕円

$$\frac{x^2}{2}+y^2=1$$

の原点に関する垂足曲線を求めよ．

［解］楕円上の点 (t,u) における接線は

$$\frac{tx}{2}+uy=1 \tag{8}$$

原点を通りこの接線と垂直な線は

$$2ux - ty = 0 \tag{9}$$

(8),(9) より u を消去すると,

$$t(x^2 + y^2) = 2x \tag{10}$$

t を消去すると

$$u(x^2 + y^2) = y \tag{11}$$

(10) より

$$t^2(x^2 + y^2)^2 = 4x^2 \tag{12}$$

(11) より

$$u^2(x^2 + y^2)^2 = y^2 \tag{13}$$

(12),(13) および $t^2 + 2u^2 = 2$ より

$$(x^2 + y^2)^2 = 2x^2 + y^2 \tag{14}$$

(14) は題意を満たすための必要条件でしかないので，逆を調べると，垂足曲線のほか孤立点 $(0, 0)$ をもつことがわかる（図 3）.

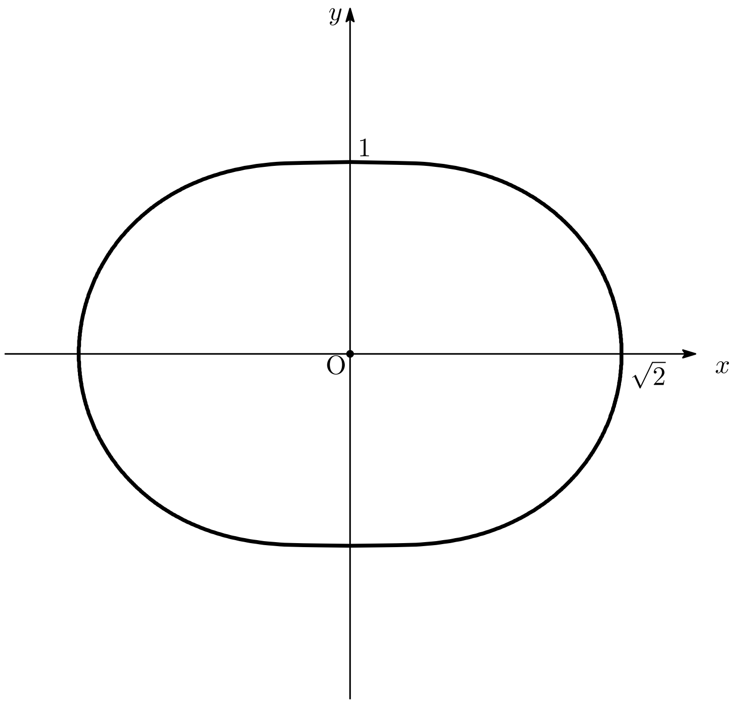

図 3

定理 1 楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

の原点に関する垂足曲線は

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 \text{（原点は除く）}$$

である．

［証明］楕円上の点 (t,u) における接線は

$$\frac{tx}{a^2}+\frac{uy}{b^2}=1 \tag{15}$$

原点を通りこの接線と垂直な線は

$$\frac{ux}{b^2}-\frac{ty}{a^2}=0 \tag{16}$$

(15),(16) より u を消去すると，

$$\frac{t}{a^2}(x^2+y^2)=x \tag{17}$$

t を消去すると

$$\frac{u}{b^2}(x^2+y^2)=y \tag{18}$$

(17) より

$$\frac{t^2}{a^2}(x^2+y^2)^2=a^2x^2 \tag{19}$$

(18) より

$$\frac{u^2}{b^2}(x^2+y^2)^2=b^2y^2 \tag{20}$$

(19),(20) および $\dfrac{t^2}{a^2}+\dfrac{u^2}{b^2}=1$ より

$$(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$$

逆を調べると，孤立点 $(0,0)$ 以外で垂足曲線の条件を満たしている．［証明おわり］
$a=2, b=1$ の場合を図 4 に示す．

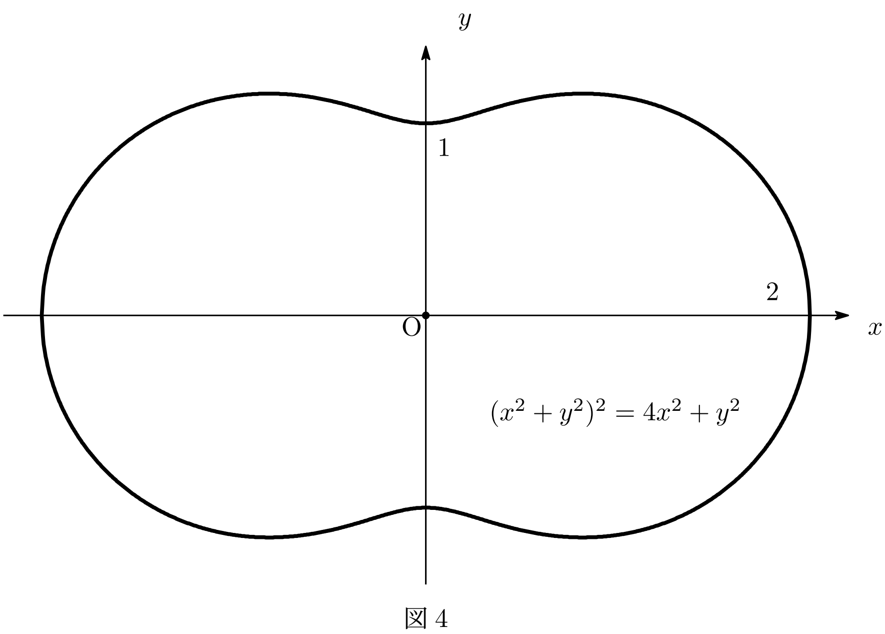

図 4

参考文献

[1] 聖文者編集部編『曲線・グラフ総覧』(聖文社（現 聖文新社), 1989 年）