ヤコビアンに関連して

問題 1 xyz 空間は，xy 平面，yz 平面，zx 平面と，

$$\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)=1 \tag{1}$$

で表される曲面によって何個の領域に分割されるか．

［解］(**??**) の分母をはらい，展開して整理し，さらに因数分解すると，

$$(xy+z^2)(yz+x^2)(zx+y^2)=0 \tag{2}$$

となる．つまり (**??**) は

$$(xy+z^2=0 \text{ または } yz+x^2=0 \text{ または } zx+y^2=0) \text{ かつ } (xyz\neq 0)$$

と同値である．グラフを平面 $z=z$ $(z>0)$，つまり xy 平面と平行，つまり水平で，かつ上方 (z 軸方向) にある平面で切った断面は図 1 のようになる．

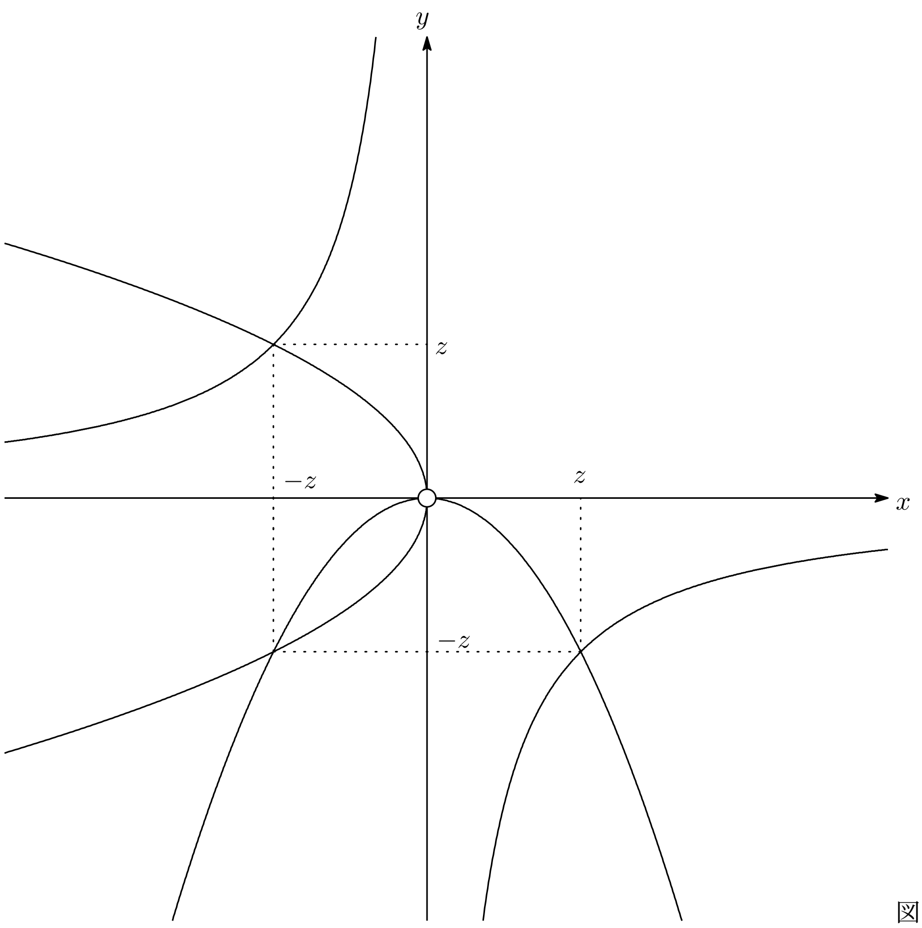

図 1

$z>0$ である平面で同様に切った場合，その図形は相似で，13 個の領域に分かれる．またその面積は 0 とならない．よって，$z>0$ の部分では，xy 平面，yz 平面，zx 平面と，曲面 (**??**) によって，13 個の領域に分割さ

れる．

$z<0$ である水平面で切った断面は図 1 と左右上下が逆になった図となり，同様に考えることができる．よって $z<0$ の部分でも 13 個の領域に別れ，合計 26 個の領域に分かれる．この場合，各領域は境界を含まないと考えるのが妥当であろう．

［別解 1］前述の解では断面の各領域が連続しているのかどうかの論点があいまいのような気がするので，少し考え方を変えてみた．xy 平面に水平な $z>0$ である平面で切った図 1 において x 軸方向に $1/z$ 倍，y 軸方向にも $1/z$ 倍すると，図 2 のようになる．

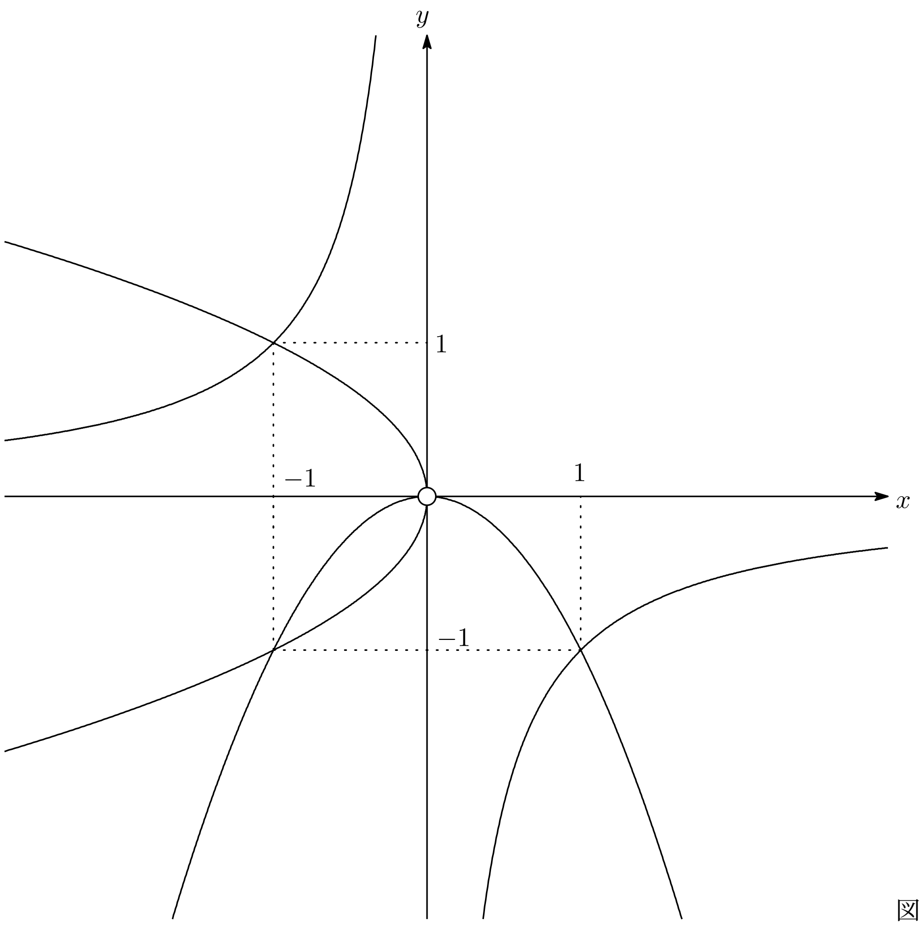

図 2

(**??**) は

$$(xy+1)(y+x^2)(x+y^2)=0 \tag{3}$$

となり，$z>0$ で切れば，どの断面も同じ図形となり，$z>0$ の各領域は柱状となる．よって，$z>0$ では 13 個の領域にわかれ，同様に考えて $z<0$ でも 13 個の領域に分かれるので，合計は 26 個の領域に分かれる．

［別解 2］座標平面によって区切られる 8 個の領域のうち，(1) は明らかに $x>0, y>0, z>0$ の領域を通らない，同様に $x<0, y<0, z<0$ の領域も通らない．今，$x>0, y<0, z>0$ の領域について考え，次のように変数変換する．

$$x=e^u, y=-e^v, z=e^w \quad (u,v,w\in\mathbb{R})$$

(2) は

$$(-e^{u+v}+e^{2w})(-e^{v+w}+e^{2u})(e^{u+w}+e^{2v})=0 \tag{4}$$

となり，(4) を満たす解は

$$u+v-2w=0, v+w-2u=0 \tag{5}$$

となる (4) の一番右の括弧は解を持たない．(5) は平行でない 2 平面なので，uvw 空間を 4 つに切る．よって，もとの $x>0, y<0, z>0$ の領域も 4 つに切る．残った 5 つの領域も同様に考え 4 つに分かれるので合計 24 個．先に述べた，$x>0, y>0, z>0$ と $x<0, y<0, z<0$ の領域が一つずつあるので，合計 26 個である．

厳密には次の定理を用いている．

定理 1 (逆写像定理) $\boldsymbol{R}^3$ から $\boldsymbol{R}^3$ への写像

$$\Phi(u,v,w):(u,v,w)\to(x,y)=(x(u,v,w),\ y(u,v,w),z(u,v,w))$$

において，

(A) $\Phi(u_0,v_0,w_0)=(x_0,y_0,z_0)$

(B) Φ は C^1 級写像

(C) $J_\Phi(u_0,v_0,w_0)$ が正則行列

であるならば,

点 (u_0,v_0,w_0) を含む十分小さな領域：U ,

点 (x_0,y_0,z_0) を含む十分小さな領域：X

を適当に定めれば，Φ は U から X への 1 対 1 写像となる。

この場合，ヤコビ行列は

$$J_\Phi(u,v,w)=\begin{pmatrix} e^u & 0 & 0 \\ 0 & -e^v & 0 \\ 0 & 0 & e^w \end{pmatrix}$$

となり明らかに $u,v,w\in\mathbb{R}$ において正則であるので，この定理が適用できる．

ちなみに［別解 1］においては

$$x=uw, y=vw, z=w$$

と考えることができるので

$$J_\Phi(u,v,w)=\begin{pmatrix} w & 0 & u \\ 0 & w & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となり，$w\neq 0$ において正則である．つまり平面 $z=0$ を除いてこの定理が適用できる．

さて，実際グラフはどのようになるか調べてみよう．陰線処理がうまくいっていないのでみにくいが，図 3 は $0<x<5, -5<y<0, 0<z<5$ の部分に限ったグラフである．また，$x>0, y<0, z>0$ の領域を平面 $x-y+z=k>0$ で切り取ると正三角形になるが，曲線のグラフは図 4 のように円弧となり，正三角形の重心を通る．

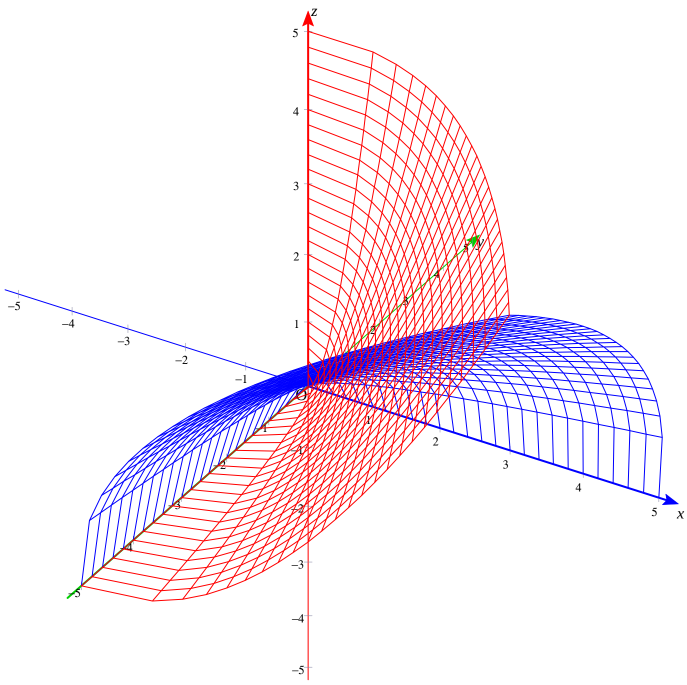

図 3

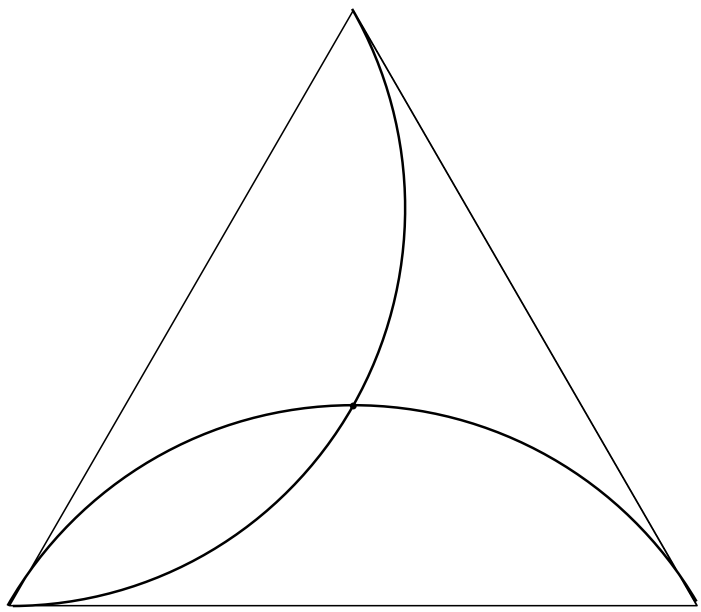

図 4