留数

定義 1 孤立特異点　$f(z)$ が α で正則でないとき，α を $f(z)$ の特異点とよぶ．とくに α を含む領域 D 内で α を除いて正則であるとき，α を $f(z)$ の**孤立特異点**とよぶ．

定理 1 $f(z)$ は領域 D 内で α を孤立特異点に持ち，α を除いて正則とする．C を D 内の α のまわりを一周する単純閉曲線とするとき，積分値 $\displaystyle\int_C f(z)$ は，このような C のとり方に無関係である．

［証明略］

定義 2 α が $f(z)$ の孤立特異点のとき，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz$$

を $f(z)$ の α における**留数**といい，$\mathrm{Res}(f(z),\alpha)$ で表す．

定理 2 $f(z)$ が閉曲線 C の周と内部を含む領域 D で $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$ を孤立特異点を持ち，他では正則のとき，

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}(f(z),\alpha_j)$$

である．

［証明略］

定理 3

$$|z_1z_2| = |z_1||z_2|$$

［証明略］

定理 4 実変数 t の複素数値関数 $\phi(t)$ において，$a<b$ とすると，

$$\left|\int_a^b \phi(t)dt\right| \leq \int_a^b |\phi(t)|dt$$

［証明］

$$\int_a^b \phi(t)dt = \left|\int_a^b \phi(t)dt\right| e^{i\theta}, \quad \phi(t) = |\phi(t)|e^{i\eta}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b \phi(t)dt\right| &= e^{-i\theta}\int_a^b \phi(t)dt \\
&= e^{-i\theta}\int_a^b e^{i\eta}|\phi(t)|dt \\
&= \int_a^b e^{i(\eta-\theta)}|\phi(t)|dt \\
&= \int_a^b \cos(\eta-\theta)|\phi(t)|dt \leq \int_a^b |\phi(t)|dt
\end{aligned}$$

［証明おわり］

定理 5 $|f(z)|$ の曲線 C 上での最大値を M, C の長さを $L, a < b$ とすると,

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|dt \leq ML$$

が成り立つ.

［証明］

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

とする.

$$\begin{aligned}\left|\int_C f(z)dz\right| &= \left|\int_a^b f(z(t))z'(t)dz\right| \\ &\leq \int_a^b |f(z(t))z'(t)|dz \\ &= \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|dz \\ &\leq \int_a^b M|z'(t)|dz \\ &= M\int_a^b |z'(t)|dz \\ &= M\int_a^b \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2}dz = ML\end{aligned}$$

［証明おわり］

定理 6 α が $f(z)$ の孤立特異点で

$$l = \lim_{x\to\alpha}(z-\alpha)f(z)$$

が存在すれば

$$l = \mathrm{Res}(f(z), \alpha)$$

である.

［証明］C を α を中心とする半径 r の円周とする.

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_C \left\{f(z) - \frac{l}{z-\alpha}\right\}dz \tag{1}$$

とすると,

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(z-\alpha)f(x) - l}{z-\alpha}dz \\ |I| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(z-\alpha)f(x) - l}{z-\alpha}dz\right| \\ &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_C \frac{(z-\alpha)f(x) - l}{z-\alpha}dz\right|\end{aligned}$$

C 上での $|(z-\alpha)f(x)-l|$ の最大値を m とすると

$$\begin{aligned}\left|\frac{(z-\alpha)f(x)-l}{z-\alpha}\right| &= \frac{|(z-\alpha)f(x)-l|}{|z-\alpha|}\\ &= \frac{|(z-\alpha)f(x)-l|}{r} \leq \frac{m}{r}\end{aligned}$$

C の弧長は $2\pi r$ であるから，前定理より，

$$|I| \leq \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{m}{r}\cdot 2\pi r = m \tag{2}$$

定理 1 よりこの関係は C の大きさによらない．つまり C をどれだけ小さくしても成り立つ．いま $r \to 0$ とすると $(z-\alpha)f(z) \to l$ なので，$|(z-\alpha)f(x)-l| \to 0$．つまり $m \to 0$．(2) より

$$I = 0$$

(1) より

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{l}{z-\alpha}dz = l$$

［証明おわり］

定理 7 $g(z)$ が点 α の近傍で正則で，$h(\alpha)=0, h'(\alpha)\neq 0$ ならば，

$$\mathrm{Res}\left(\frac{g(z)}{h(z)},\alpha\right) = \frac{g(\alpha)}{h'(\alpha)}$$

である．

［証明］前定理より

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}\left(\frac{g(z)}{h(z)},\alpha\right) &= \lim_{x\to\alpha}\frac{(z-\alpha)g(\alpha)}{h(\alpha)}\\ &= \lim_{x\to\alpha}\frac{g(z)}{\dfrac{h(z)-h(\alpha)}{z-\alpha}}\\ &= \frac{\displaystyle\lim_{x\to\alpha} g(z)}{\displaystyle\lim_{x\to\alpha}\frac{h(z)-h(\alpha)}{z-\alpha}} = \frac{g(\alpha)}{h'(\alpha)}\end{aligned}$$

［証明おわり］

問題 1 次の関数の特異点と，その点における留数を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{z^2+1}$　　(2) $\tan z$　　(3) $\dfrac{e^z}{\sinh z}$　　(4) $\dfrac{\cos z}{z(z-2i)}$

［解］(1) $\dfrac{1}{z^2+1} = \dfrac{1}{(z+i)(z-i)}$

$\mathrm{Res}\left(\dfrac{1}{z^2+1},-i\right) = \lim_{z\to -i}\dfrac{1}{z-i} = -\dfrac{1}{2i}$

$\mathrm{Res}\left(\dfrac{1}{z^2+1},i\right) = \lim_{z\to i}\dfrac{1}{z+i} = \dfrac{1}{2i}$

(2)　$\tan z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$
定理 7 より
$\mathrm{Res}\left(\tan z, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right) = \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right)}{-\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right)} = -1$
(3)　$\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} = 0$ とおくと $e^{2z} = 1$
$e^{2x+2iy} = e^{2x}(\cos 2y + i \sin 2y) = 1$ より $x = 0, y = n\pi$
よって，特異点は $z = in\pi$
$(\sinh z)' = \cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$ より
$\alpha = in\pi$ とおくと $\mathrm{Res}\left(\dfrac{e^z}{\sinh z}, \alpha\right) = \dfrac{2e^\alpha}{e^\alpha + e^{-\alpha}} = \dfrac{2e^{2\alpha}}{e^{2\alpha} + 1} = 1$
(4)　特異点は $z = 0, 2i$
$\mathrm{Res}(f(z), 0) = \lim_{x \to 0} z f(z) = \lim_{x \to 0} \dfrac{\cos z}{z - 2i} = \dfrac{1}{-2i} = \dfrac{i}{2}$
$\mathrm{Res}(f(z), 2i) = \lim_{x \to 0} \dfrac{\cos z}{z} = \dfrac{\cos 2i}{2i} = \dfrac{e^2 + e^{-2}}{4i} = -\dfrac{i(e^2 + e^{-2})}{4}$

定義 3 関数 $f(x)$ が孤立特異点 α の近傍内の点 $z(\neq \alpha)$ で

$$f(z) = \frac{a_{-p}}{(z-\alpha)^p} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-\alpha} + g(z)$$

と表されるとき，α を $f(z)$ の位数 p の極という．ただし $g(z)$ は α の近傍において正則であるとする．

定理 8 定義 3 において

$$\mathrm{Res}(f(z), \alpha) = a_{-1}$$

［証明］

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f(z), \alpha) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)dz \\ &= a_{-p} \cdot 0 + \cdots + a_{-1} + 0 = a_{-1}\end{aligned}$$

［証明おわり］

定理 9 α が $f(z)$ の p 位の極ならば

$$\mathrm{Res}(f(z), \alpha) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z \to \alpha} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} \{(z-\alpha)^p f(z)\}$$

である．

［証明］

$$f(z) = \frac{a_{-p}}{(z-\alpha)^p} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-\alpha} + g(z)$$

であるから

$$(z-\alpha)^p f(z) = a_{-p} + \cdots + a_{-1}(z-\alpha)^{p-1} + (z-\alpha)^p g(z)$$

これを $p-1$ 回微分すると，$p-1$ 次未満は全て 0 になって，

$$\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}(z-\alpha)^p f(z) = a_{-1}(p-1)! + (z-\alpha)h(z)$$

とかける． $g(x)$ は α の近傍内で正則なので $h(z)$ も正則

$$\therefore \lim_{z\to\alpha}\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}(z-\alpha)^p f(z)=a_{-1}(p-1)!$$

$$\therefore \frac{1}{(p-1)!}\lim_{z\to\alpha}\frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}(z-\alpha)^p f(z)=a_{-1}=\mathrm{Res}(f(z),\alpha)$$

［証明おわり］

とくに α が $f(z)$ の 2 位の極ならば

$$\mathrm{Res}(f(z),\alpha)=\lim_{z\to\alpha}\frac{d}{dz}\{(z-\alpha)^2 f(z)\}$$

問題 2 次の関数の括弧の中の特異点における留数を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{z(z-1)^2}\quad(\alpha=1)$　　(2) $\dfrac{1}{z(z+3)^3}\quad(\alpha=-3)$

［解］(1) $\dfrac{1}{z(z-1)^2}=\dfrac{a}{z}+\dfrac{b}{(z-1)^2}+\dfrac{c}{z-1}$ とおくと $a=b=1,c=-1$

$\therefore \mathrm{Res}\left(\dfrac{1}{z(z-1)^2},1\right)=-1$

(2) $\dfrac{1}{z(z+3)^3}=\dfrac{a}{z}+\dfrac{b}{(z+3)^3}+\dfrac{c}{(z+3)^2}+\dfrac{d}{z+3}$ とおくと $a=\dfrac{1}{27},b=-\dfrac{1}{3},c=-\dfrac{1}{9},d=-\dfrac{1}{27}$

$\therefore \mathrm{Res}\left(\dfrac{1}{z(z+3)^3},-3\right)=-\dfrac{1}{27}$

参考文献

[1] 寺田文行『複素関数の基礎』（サイエンス社，1998 年）