関孝和の楕円周を求める近似式

楕円周は一般に楕円積分となり，初等関数で表すことはできないことはよく知られている．近似的に楕円周を求める方法はいろいろあるが，関孝和が考えた方法を見てみよう．

関は図 1 のように，中心角 90 度の扇形が大小二つの円で切り取られた斜線の部分を等脚台形に変換し，その等脚台形の対角線で楕円周を近似することを考えた．ここで注意しなければならないのは，等脚台形の高さ

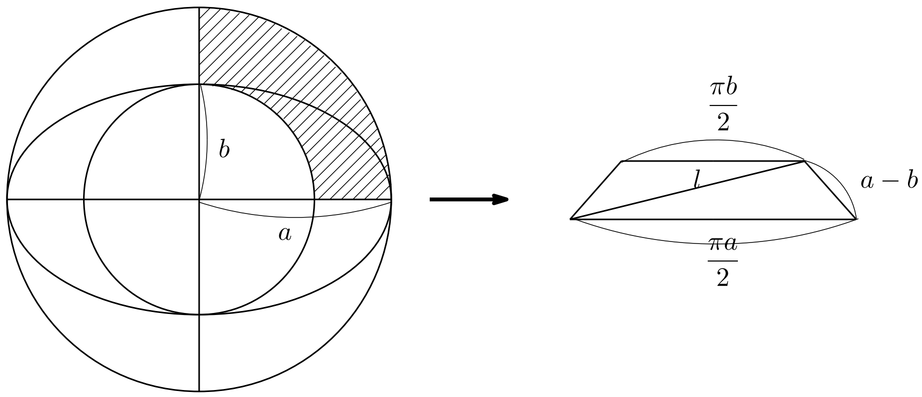

図 1

が二つの円の半径の差つまり $a-b$ になっているわけではなく，等脚台形の斜辺の長さが $a-b$ になっていることである．つまり，トイレットペーパーを 4 分の 1 に切り，それを台形になるように伸ばしたのではなく，このバームクーヘンのような形の周りに紐を這わせてそれを伸ばした感じである．この方が近似がよい．

対角線の長さを l とすると，

$$\begin{aligned} l^2 &= \left(\frac{\pi a}{4}+\frac{\pi b}{4}\right)^2+(a-b)^2-\left(\frac{\pi a}{4}-\frac{\pi b}{4}\right)^2 \\ &= (a-b)^2+\frac{\pi^2 ab}{4} \end{aligned}$$

つまり楕円周は

$$\boxed{4l = 2\sqrt{4(a-b)^2+\pi^2 ab}}$$

なんとも単純な近似式である．$(a,b)=(5,3)$ を代入してみると，

$$4l = 2\sqrt{16+15\pi^2} \simeq 25.616$$

実際の楕円周は，離心率が $\dfrac{\sqrt{5^2-3^2}}{5}=\dfrac{4}{5}$ であるから，これを代入していわゆる計算サイトで計算させてみると，

25.52699886339812846618

であるから，関の近似はいい値を与える．第二種完全楕円積分の級数展開

$$\begin{aligned} K(k) &= \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \frac{k^{2n}}{1-2n} \quad (\text{ただし } (-1)!! = 1) \\ &= \frac{\pi}{2}\left\{1 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{64}k^4 - \frac{5}{256}k^6 - \frac{7\times 5^2}{2^{14}}k^8 - \cdots\right\} \end{aligned}$$

を使って計算してみると 2 項までで 26.389,3 項までで 25.786,4 項までで 25.625,5 項までで 25.569 であるから 4 項までの近似に匹敵するくらいの正確さなのである．

参考文献

[1] CASIO「$\sqrt{\text{keis}\alpha\text{n}}$」<http://keisan.casio.jp/>

[2] 「ウィキペディア」<http://ja.wikipedia.org/wiki/>