鏡映の鏡映の鏡映の鏡映は螺旋運動

ユークリッド空間における一般の平面は

$$H = \{\mathrm{P}(x, y, x) | ax + by + cz = d\}$$

と表される．

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

とすると，$\boldsymbol{a}$ を法線ベクトルとする平面 H は

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = d$$

と表すこともできる．

定理 1 平面 H と原点との距離は $\dfrac{d}{\|\boldsymbol{a}\|}$ である．

［証明］H 上の点を $\lambda\boldsymbol{a}$ とすると，

$$\boldsymbol{a} \cdot \lambda\boldsymbol{a} = d$$
$$\therefore \lambda = \frac{d}{\|\boldsymbol{a}\|}$$

［証明おわり］

定理 2 H に関する鏡映 m_H は

$$m_H(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \frac{2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} - 2d}{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}\boldsymbol{a}$$

で表される．

［証明］

$$m_H(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{x} = t\boldsymbol{a} \tag{1}$$

と表される．また，$m_H(\boldsymbol{x})$ と $\boldsymbol{x}$ の中点は H 上にあるので

$$\boldsymbol{a} \cdot (m_H(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{x}) = 2d \tag{2}$$

(1),(2) より $m_H(\boldsymbol{x})$ を消去して

$$\boldsymbol{a} \cdot (t\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{x}) = 2d$$

t について解くと

$$t = \frac{2d - 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}$$

［証明おわり］

ベクトルで表しても複雑だが，ためしに座標で表示してみると次のようになる．

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{2(ax + by + cz) - 2d}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} (-a^2 + b^2 + c^2)x - 2aby - 2acz + 2ad \\ -2abx + (a^2 - b^2 + c^2)y - 2bcz + 2bd \\ -2acx - 2bcy + (a^2 + b^2 - c^2)z + 2cd \end{pmatrix}$$

定理 3 ユークリッド平面上の 2 直線 l_1, l_2 に関する鏡映 m_1, m_2 の合成変換 $m_2 \circ m_1$ は平行移動である．その移動距離は l_1 と l_2 の距離の 2 倍に等しい．

［証明略］

定理 4 ユークリッド平面上の角度 θ で交わる 2 直線 l_1, l_2 による鏡映 m_1, m_2 の合成変換 $m_2 \circ m_1$ は回転角 2θ の回転である．回転方向は l_1 から l_2 の方向である．また $l_1 \perp l_2$ のときのみ $m_2 \circ m_1 = m_1 \circ m_2$ である．

［証明略］

定理 5 ユークリッド空間上の 2 平面 H_1, H_2 に関する鏡映 m_1, m_2 の合成変換 $m_2 \circ m_1$ は平行移動である．その移動距離は H_1 と H_2 の距離の 2 倍に等しい．

［証明略］

定理 6 ユークリッド空間上の角度 θ で交わる 2 平面 H_1, H_2 による鏡映 m_1, m_2 の合成変換 $m_2 \circ m_1$ は回転角 2θ の回転である．回転方向は H_1 から H_2 の方向である．また $H_1 \perp H_2$ のときのみ $m_2 \circ m_1 = m_1 \circ m_2$ である．

［証明略］

定理 7 ユークリッド空間上の 3 平面 H_1, H_2, H_3 に関する鏡映を m_1, m_2, m_3 とする．$H_1 \perp H_3 \perp H_2$ であるとき，

$$m_3 \circ m_2 \circ m_1 = m_2 \circ m_3 \circ m_1 = m_2 \circ m_1 \circ m_3$$

である．

［証明］定理 6 の垂直な場合を適用すれば，m_3 の位置はどこにでも移動できる．m_1, m_2 の順序を変えることはできない．［証明おわり］

$H_1 \nparallel H_2$ の場合は**回転鏡映**，$H_1 \parallel H_2$ の場合は**滑り鏡映**となる．

定理 8 3 つの鏡映の合成は回転鏡映か滑り鏡映である．

［証明略］図にかくのがちょっと難しいのと，図なしでもなかなかわかりにくい記述になるので省く．要するに鏡映面を適当に回転あるいは平行移動することにより前定理の場合（つまりひとつの面が他の 2 面に垂直である場合）に帰着できるのである．

定理 9 4 つの鏡映の合成は螺旋運動である．

［証明略］

定理 10 ユークリッド空間の全ての合同変換は 4 つ以下の鏡映の合成で表される．

［証明略］この証明はかなり大がかりになる．

問題 1 $z = 1$ に関する鏡映を m_1，$x = 1$ に関する鏡映を m_2，$y = 1$ に関する鏡映を m_3，$z = -1$ に関する鏡映を m_4 とすると，合成変換 $m_4 \circ m_3 \circ m_2 \circ m_1$ はどのような変換か．

［解］垂直な面に関する鏡映はその順番を変えてもよいので，$m_4 \circ m_3 \circ m_2 \circ m_1 = (m_4 \circ m_1) \circ (m_3 \circ m_2)$

つまり直線

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

に関する，回転角 π，移動距離 4 の螺旋運動である．

参考文献

[1] 松本幸夫，川崎徹郎『空間とベクトル』（放送大学）