回転の回転は回転

一次変換において回転移動の合成は当然回転移動になるわけだが，原点以外を中心とする回転移動の合成はどのような変換になるのか調べてみよう．

定理 1 原点に関する回転移動と，平行移動の合成は，原点以外を中心とする回転移動である．

［証明］原点を中心に θ だけ回転する変換を表す行列を R_θ とする．変換前のベクトルを $\boldsymbol{x}$ とする．$\boldsymbol{a}$ が平行移動量とする．

$$R_\theta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} = R(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}$$

とおくと，

$$\boldsymbol{a} = -R_\theta \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}$$

θ が $2n\pi$ でない限り，

$$\boldsymbol{b} = (E - R_\theta)^{-1}\boldsymbol{a}$$

よって，$\boldsymbol{b}$ を中心とする回転移動であることがわかる．これは先に回転を行った場合であるが，平行移動を先に行った場合も同様に証明できる．［証明おわり］

問題 1 ユークリッド平面において，原点を中心に θ だけ回転し，さらに $\boldsymbol{a}$ を中心に ϕ だけ回転するような移動はどのような変換か調べよ．

［解］原点を中心に θ だけ回転する変換を表す行列を R_θ とする．つまり

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

である．変換前のベクトルを $\boldsymbol{x}$，変換後のベクトルを $\boldsymbol{y}$ とすると，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y} &= R_\phi \left(R_\theta \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\right) + \boldsymbol{a} \\ &= R_\phi R_\theta \boldsymbol{x} - R_\phi \boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} \\ &= R_{\theta+\phi}\boldsymbol{x} + (E - R_\phi)\boldsymbol{a} \end{aligned}$$

つまり原点を中心に $\theta + \phi$ だけ回転したのち，$(E - R_\phi)\boldsymbol{a}$ だけ平行移動したものとなる．$\theta + \phi = 2\pi$ のときは後者の平行移動のみとなる．

さて，この変換で常に移動しない点はどこであろうか．そのような点を $\boldsymbol{x}$ とおくと，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= R_{\theta+\phi}\boldsymbol{x} + (E - R_\phi)\boldsymbol{a} \\ (E - R_{\theta+\phi})\boldsymbol{x} &= (E - R_\phi)\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} &= (E - R_{\theta+\phi})^{-1}(E - R_\phi)\boldsymbol{a} \end{aligned}$$

つまりこの変換は $(E - R_{\theta+\phi})^{-1}(E - R_\phi)\boldsymbol{a}$ を中心に $\theta + \phi$ だけ回転する変換であると言える．逆行列の部分は $R_{\theta+\phi}$ がちょうど $2n\pi$ の回転を表すときは存在しない．$2n\pi$ だけ回転するということは，不動点が無限にある（つまり全く動かない）か，ひとつもない（単なる並行移動）かのどちらかであるので当然といえば当然である．

問題 2 R_1, R_2 は平面の回転で，R_1 は原点 O を中心とする回転角 $\dfrac{\pi}{2}$ の回転，R_2 は P(1,1) を中心とする回転角 π の回転とする．合成変換 $R_2 \circ R_1$ はどのような変換か答えよ．

［解］前問と同様の記号を用いると

$$R_\pi = -E$$

$$\begin{aligned}
(E - R_{\theta+\phi})^{-1}(E - R_\phi)\boldsymbol{a} &= 2\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\\
&= 2\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

よって，求める変換は，中心 (2,0)，回転角 $-\dfrac{\pi}{2}$ の回転である．

問題 3 $\boldsymbol{a}$ を中心に θ だけ回転し，さらに $\boldsymbol{b}$ を中心に ϕ だけ回転するような移動はどのような変換か調べよ．

［解］問題 1 と同じ記号を用いて，不動点を求めると，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= R_\phi[\{R_\theta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) + a\} - \boldsymbol{b}] + \boldsymbol{b}\\
&= R_\phi R_\theta \boldsymbol{x} - R_\theta R_\phi \boldsymbol{a} + R_\phi \boldsymbol{a} - R_\phi \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b}\\
&= R_{\theta+\phi}\boldsymbol{x} - R_{\theta+\phi}\boldsymbol{a} + R_\phi(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}\\
\therefore \boldsymbol{x} &= (E - R_{\theta+\phi})^{-1}(-R_{\theta+\phi}\boldsymbol{a} + R_\phi(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}) \qquad (1)
\end{aligned}$$

よって，平行移動のみになる場合は $R_\phi(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}$ を平行移動量とし，それ以外は (1) を中心とする $\theta + \phi$ の回転移動となる．

問題 4 R_1, R_2, R_3 は平面の回転で，

1. R_1 : 回転の中心 原点 O，回転角 $\dfrac{\pi}{3}$
2. R_2 : 回転の中心 P(1,0)，回転角 $\dfrac{\pi}{3}$
3. R_3 : 回転の中心 P(1,0)，回転角 $-\dfrac{\pi}{3}$

とするとき，合成変換 $R_2 \circ R_1, R_3 \circ R_1, R_2 \circ R_1 \circ R_3$ はそれぞれどのような合同変換であるか求めよ．

［解］$R_2 \circ R_1$ について，回転の中心は

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right)^{-1}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{6}\end{pmatrix}$$

$R_3 \circ R_1$ は平行移動である．その平行移動量は

$$\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

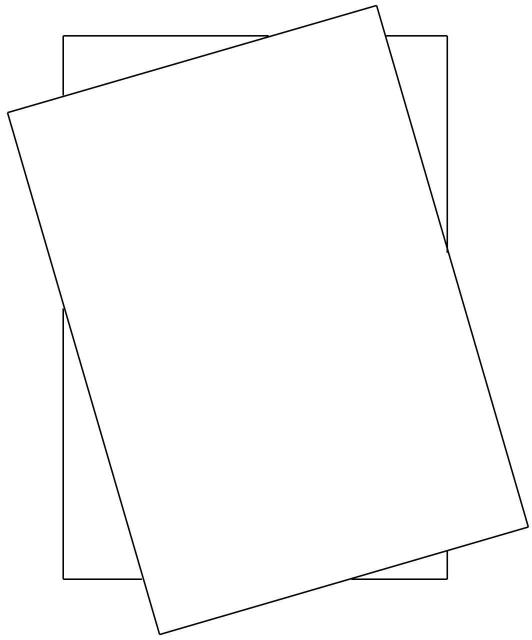
$R_2 \circ R_1 \circ R_3$ の回転の中心は $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$．途中計算は省略.

定理 2 $\boldsymbol{a}$ を中心に θ だけ回転し，さらに $\boldsymbol{b}$ を中心に ϕ だけ回転するような移動は，ある点 $\boldsymbol{c}$ を中心とした $\theta+\phi$ だけ回転する移動と考えることができる．このとき $\boldsymbol{c}$ は線分 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ を $\cos\theta : \cos\phi$ に分ける点を通り $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ に垂直な直線上にある．ただし $\theta+\phi \neq 2n\pi$ とする．

［証明略］

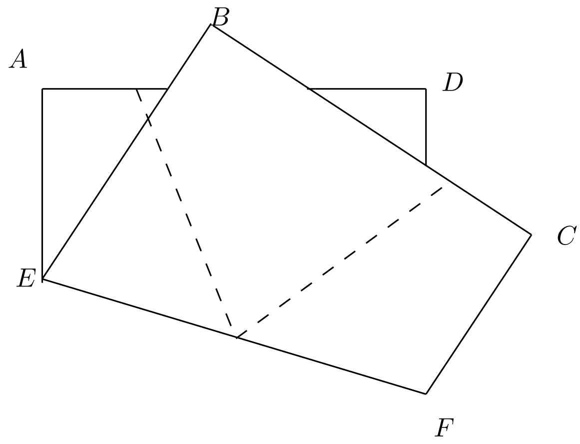
このことは，計算に頼らず作図で回転の中心を求めるときに役立つ．

問題 5 合同な 2 枚の長方形の紙を適当に回転させて重ねた場合，紙を折ることのみでその回転の中心を求める方法を考えよ．



［解略］図を示すのが面倒.

問題 6 長方形の紙を図のように適当に二つに折り，さらに点 A と点 B が重なるように折る．また点 C と点 D が重なるよう折ると，これらの折り目は全て 1 点で交わることを証明せよ.



［証明略］同じく図をかくのがめんどう.

参考文献

[1] 松本幸夫，川崎徹郎『空間とベクトル』（放送大学）