曲面のパラメータ表示と第 1 基本形式

ユークリッド空間における曲面は 2 つのパラメータを用いて表すことができる．

$$g = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}(du)^2 + 2\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}du\ dv + \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v}(dv)^2$$

を**第 1 基本形式**と呼ぶ． $\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u}, du$ などが何を意味するかはすぐには理解できないが，じっくり考えるとわかる．

1　平面

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が 1 次独立で，かつ $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$ がともに平面に含まれるときこの平面は

$$\boldsymbol{x}(u,v) = u\boldsymbol{a} + v\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$$

と表せる．成分で書くと，

$$\boldsymbol{x}(u,v) = u\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + v\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

第 1 基本形式は

$$\begin{aligned} g &= ({a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2)(du)^2 + 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)du\ dv + ({b_2}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2)(dv)^2 \\ &= (a_1du + b_1dv)^2 + (a_2du + b_2dv)^2 + (a_3du + b_3dv)^2 \end{aligned}$$

2　単位球面

$$\boldsymbol{x}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \cos u \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}$$

第 1 基本形式は

$$g = (du)^2 + \cos^2 u (dv)^2$$

これは uv 平面から球面にうつるとき u 方向の長さは変化しないが，v 方向は $\cos u$ 倍に縮むことを示している．特に極では 0 である．また u 方向と v 方向のつくる角度は直角のままで変らない．

3　楕円面

$$\boldsymbol{x}(u,v) = \begin{pmatrix} a\cos u \cos v \\ b\cos u \sin v \\ c\sin u \end{pmatrix}$$

x, y, z で表すと，

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

である．a, b, c のうちどれか 2 つが等しいとき回転楕円面と呼ぶ.

第 1 基本形式は

$$\begin{aligned} g =&(a^2 \sin^2 u \cos^2 v + b^2 \sin^2 u \sin^2 v + c^2 \cos^2 u)(du)^2 \\ &+ 2(a^2 \sin u \cos u \sin v \cos v + b^2 \sin u \cos u \sin v \cos v)du\ dv \\ &+ (a^2 \cos^2 u \sin^2 v + b^2 \cos^2 u \cos^2 v)(dv)^2 \end{aligned}$$

4　1 葉双曲面

$$\boldsymbol{x}(u, v) = \begin{pmatrix} a \cosh u \cos v \\ b \cosh u \sin v \\ c \sinh u \end{pmatrix}$$

x, y, z で表すと,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

である.

5　2 葉双曲面

$$\boldsymbol{x}(u, v) = \begin{pmatrix} a \sinh u \cos v \\ b \sinh u \sin v \\ \pm c \cosh u \end{pmatrix}$$

x, y, z で表すと,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

である.

6　楕円放物面

$$\boldsymbol{x}(u, v) = \begin{pmatrix} au \\ bv \\ u^2 + v^2 \end{pmatrix}$$

x, y, z で表すと,

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

$a = b$ のとき回転放物面と呼ぶ.

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 2v \end{pmatrix}$$

第 1 基本形式は

$$g = (a^2 + 4u^2)(du)^2 + 8uvdu\ dv + (b^2 + 4v^2)(dv)^2$$

$$\boldsymbol{x}(u,v) = \begin{pmatrix} au \\ bv \\ \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{v^2}{2} \end{pmatrix}$$

と表すこともでき，その場合 x, y, z で表すと，

$$z = \frac{x^2}{2a^2} + \frac{y^2}{2b^2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ u \end{pmatrix}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ v \end{pmatrix}$$

となり，第 1 基本形式は

$$g = (a^2 + u^2)(du)^2 + 2uvdu\ dv + (b^2 + 2v^2)(dv)^2$$

となる．

7　双曲放物面

$$\boldsymbol{x}(u,v) = \begin{pmatrix} au \\ bv \\ u^2 - v^2 \end{pmatrix}$$

x, y, z で表すと，

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix}, \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial v} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -2v \end{pmatrix}$$

第 1 基本形式は

$$g = (a^2 + 4u^2)(du)^2 - 8uvdu\ dv + (b^2 + 4v^2)(dv)^2$$

8　トーラス

$$\boldsymbol{x}(u,v) = \begin{pmatrix} (R + r\cos u)\cos v \\ (R + r\cos u)\sin v \\ r\sin u \end{pmatrix}$$

二次曲面と違って，トーラスを x, y, z で表すとかなり複雑な式となる．

$$x^2 + y^2 = (R + r\cos u)^2 = R^2 + 2Rr\cos u + r^2\cos^2 u = R^2 + 2Rr\cos u + r^2 - z^2$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 - R^2 = 2Rr\cos u$$
$$(x^2 + y^2 + z^2 - r^2 - R^2)^2 = 4R^2r^2\cos^2 u = 4R^2(r^2 - z^2)$$

$$\begin{aligned} (x^2+y^2+z^2)^2 - 2(r^2+R^2)(x^2+y^2+z^2) + (r^2+R^2)^2 - 4R^2r^2 + 4R^2z^2 &= 0 \\ (x^2+y^2+z^2)^2 - 2(r^2+R^2)(x^2+y^2) - 2(r^2+R^2)z^2 + (r^2-R^2)^2 + 4R^2z^2 &= 0 \\ \therefore (x^2+y^2+z^2)^2 - 2(r^2+R^2)(x^2+y^2) - 2(r^2-R^2)z^2 + (r^2-R^2)^2 &= 0 \end{aligned}$$

9 螺旋面

$$\boldsymbol{x}(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u\sin v \\ av \end{pmatrix}$$

10 メビウスの帯

$$\boldsymbol{x}(u,v) = \begin{pmatrix} \left(1 - v\sin\dfrac{u}{2}\right)\cos u \\ \left(1 - v\sin\dfrac{u}{2}\right)\sin u \\ v\cos\dfrac{u}{2} \end{pmatrix}$$

参考文献

[1] 松本幸夫，川崎徹郎『空間とベクトル』(放送大学)