二進数に関するゲームの問題

問題 1 次のようなゲームを考える．

1. 最初のゲームに参加する前の持ち点は 1 点である．
2. 1 回参加するごとに，現在の持ち点が 2 倍になる．このことは次の試行の前に行われる．
3. 硬貨を投げ，表が出たら持ち点が 1 点増え，裏が出たら 1 点減る．
4. 各回に硬貨を投げる回数は 1 度である．
5. これを 10 回繰り返す．
   (1) 10 回終了時点での得点の最大値および最小値を求めよ．
   (2) 得点が 2009 になるのはどのような勝敗の時か．
   (3) 得点の期待値を求めよ．

[**解**]

(1) 最初のゲームに参加した後の点数は，
$$1 \times 2 \pm 1$$
2 回目の後では
$$(1 \times 2 \pm 1) \times 2 \pm 1$$
3 回目では
$$((1 \times 2 \pm 1) \times 2 \pm 1) \times 2 \pm 1$$
これを続けてゆく．わかりやすいように記述を少し変えると，10 回では
$$2(2(2(2(2(2(2(2(2(2 \cdot 1 \pm 1) \pm 1) \pm 1) \pm 1) \pm 1) \pm 1) \pm 1) \pm 1) \pm 1) \pm 1$$
である．これを展開すると，
$$2^{10} \pm 2^9 \pm 2^8 \pm 2^7 \pm 2^6 \pm 2^5 \pm 2^4 \pm 2^3 \pm 2^2 \pm 2^1 \pm 2^0$$
これは 11 けたの 2 進数表示にほかならないのであるが，各桁の数は 1 と 0 をとるのではなく，1 か -1 なので話が複雑である．最大値は
$$(11111111111)_2 = 2^{11} - 1 = 2047$$
であるが，最小値は
$$(10000000000)_2 - (1111111111)_2 = 1024 - 1013 = 1$$
もちろん，全て表の場合と全て裏の場合である．

(2) 10 回のゲームの勝敗の場合の数は $2^{10} = 1024$（通り）であるが，1 から 2047 までの数はそれより多いのでこの間の全ての数を網羅できないことはわかる．
勝った場合を 1，負けた場合を 0 とし上位から並べた 2 進数を a とする．反対に負けた場合を 1，勝っ

た場合を 0 として上位から並べた数を b とする．10 回のゲームが終わった時点での得点を c とすると次の等式が成り立つ．

$$\begin{cases} c = (10000000000)_2 + a - b \\ a + b = (1111111111)_2 \end{cases}$$

10 進表示にすると，

$$\begin{cases} c = 1024 + a - b & (1) \\ a + b = 1023 & (2) \end{cases}$$

(1)(2) より b を消去して，

$$c = 2a + 1$$

つまり c は奇数のみとりうる．2009 は奇数なので解がある．$c = 2009$ として解いてみると，

$$\begin{aligned} 2a + 1 &= 2009 \\ a &= 1004 \end{aligned}$$

これを二進数に直してみよう．

$$\begin{aligned} 1004 \div 2 &= 502 \cdots 0 \\ 502 \div 2 &= 251 \cdots 0 \\ 251 \div 2 &= 125 \cdots 1 \\ 125 \div 2 &= 62 \cdots 1 \\ 62 \div 2 &= 31 \cdots 0 \\ 31 \div 2 &= 15 \cdots 1 \\ 15 \div 2 &= 7 \cdots 1 \\ 7 \div 2 &= 3 \cdots 1 \\ 3 \div 2 &= 1 \cdots 1 \\ 1 \div 2 &= 0 \cdots 1 \end{aligned}$$

$$a = (111101100)_2$$

である．この表し方は一意的であるから，対応するゲームの勝ち方も一通りしかない．つまり

表表表表表裏表表裏裏

である．検算の意味もこめて各回の得点の動きを見てみると，

$$1 \to 3 \to 7 \to 15 \to 31 \to 63 \to 125 \to 251 \to 503 \to 1005 \to 2009$$

となり確かに 2009 点が実現できることが確認できた．

(3) c がとりうる値について，それぞれが起こる確率は全て等しいので，これらの平均を求めてやればよい．

$$\frac{1 + 2047}{2} = 1024 \cdots (Ans.)$$