3 角形の 2 等分

聞いていることは簡単明瞭であるにもかかわらず，解答は難しいという数学の問題はよくある．江戸時代の算額にもそのような問題が散見される．ここでとりあげる問題も簡単なことがら，「3 角形の面積を 2 等分せよ」という小学生にも理解できることを聞いている．

定理 1　3 角形の辺上の任意の点 P を通り，その 3 角形の面積を 2 等分する直線は必ず引け，その直線は点 P について唯一である．[証明略]

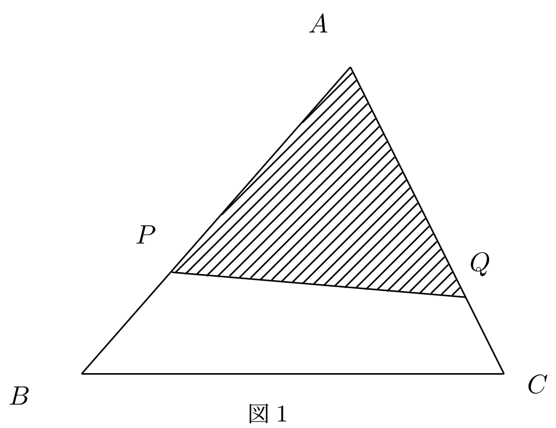

図 1

図 1 のような場合

$$2AP \cdot AQ = AB \cdot AC \tag{1}$$

となるように線分 PQ を引けばよい．ただしこの場合点 P は辺 AB の中点上か，中点より点 B に近くなくてはいけない．そうでなければ面積の二等分線は辺 BC を横切ることになる．

点 P が与えられたときの作図法を考えてみよう．もちろん (1) によって AQ の長さを求めればよいのであるが，それでは初等幾何的とは言い難い．よって次のように作図してみる．

AB の中点を M とする．点 P は線分 MB 上にあるとする．前述のように P が AM 上にある場合は A を B に B を A に読み替えてやれば同じことである．まず M を通り線分 CP に平行な直線を引き，AC と交わった点を Q とする．直線 PQ が求める直線である (図 2)．$\triangle MQC = \triangle MQP$ であることを考えれば証明は容易である．

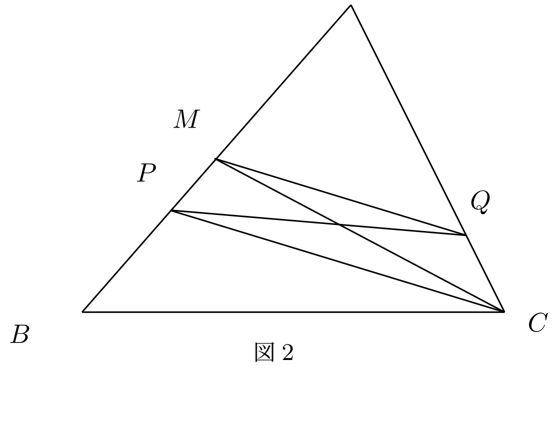

図 2

定理 2　3 角形の外にある任意の点 P を通り，その 3 角形の面積を 2 等分する直線は必ず引け，その直線は点 P について唯一である．[証明略]

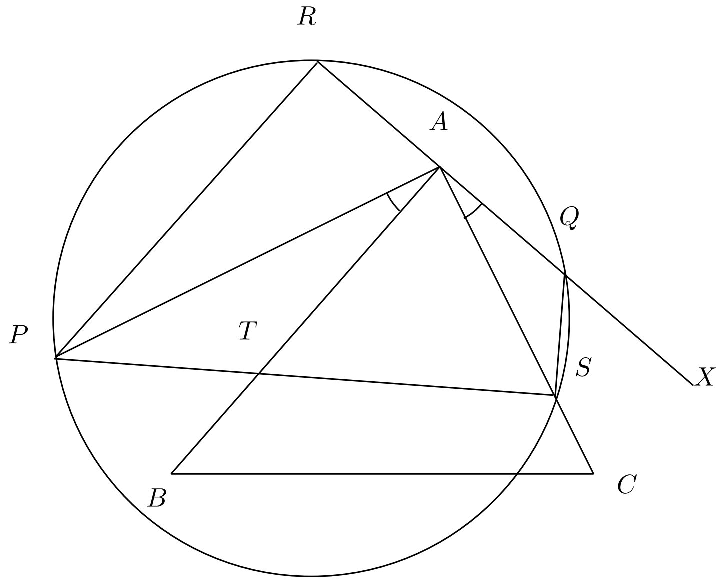

図 3

この場合の作図法は P が外にあることにより困難を伴う．まず，$\angle BAP = \angle CAX$ となるように半直線 AX をひく．AX 上に $2AP \cdot AQ = AB \cdot AC$ となるように点 Q をとる．多少繁雑であるが図 2 のような方法で Q の位置を決めることができる．P を通り AB と平行な直線と直線 AX との交点を R とする．$\triangle PQR$ の外接円をかき，線分 AC との交点を S とする．直線 PS が求める直線である．証明は略すが，そのポイントとなるのは $\triangle APT \backsim \triangle ASQ$ であるということである．

このように $\triangle ABC$ の面積の 2 等分線が辺 AB と AC を横切る場合は P が図 4 の斜線の位置にある場合である．境界となる直線は中線である．この領域外に P があるときは，他の辺を横切るわけで，あらかじめ P がどの位置にあるかを確かめておかなくてはならない．

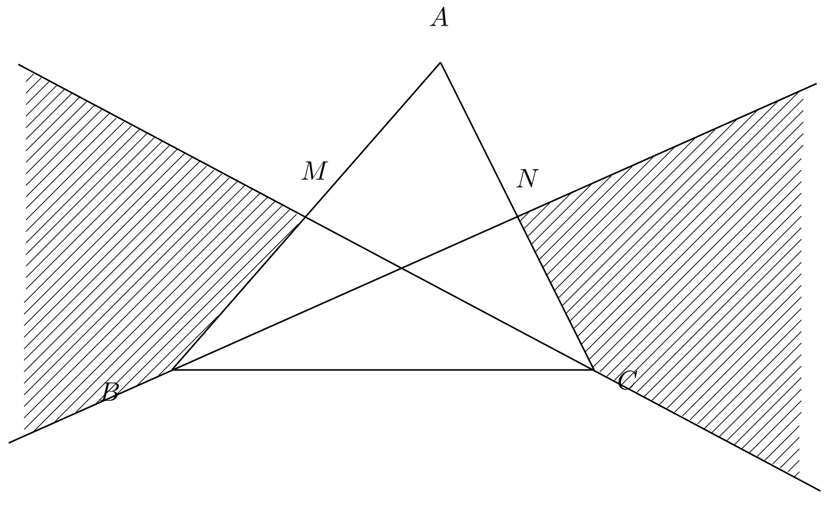

図 4

$\angle QAR$ が π を超えるときも，多少おもむきが変るが同じことを行う．(図 5)

PAQ が一直線にあるときは 3 角形の外接円はかけないので，AB に平行な直線 RP に接する円をかけばよい．証明には接弦定理を用

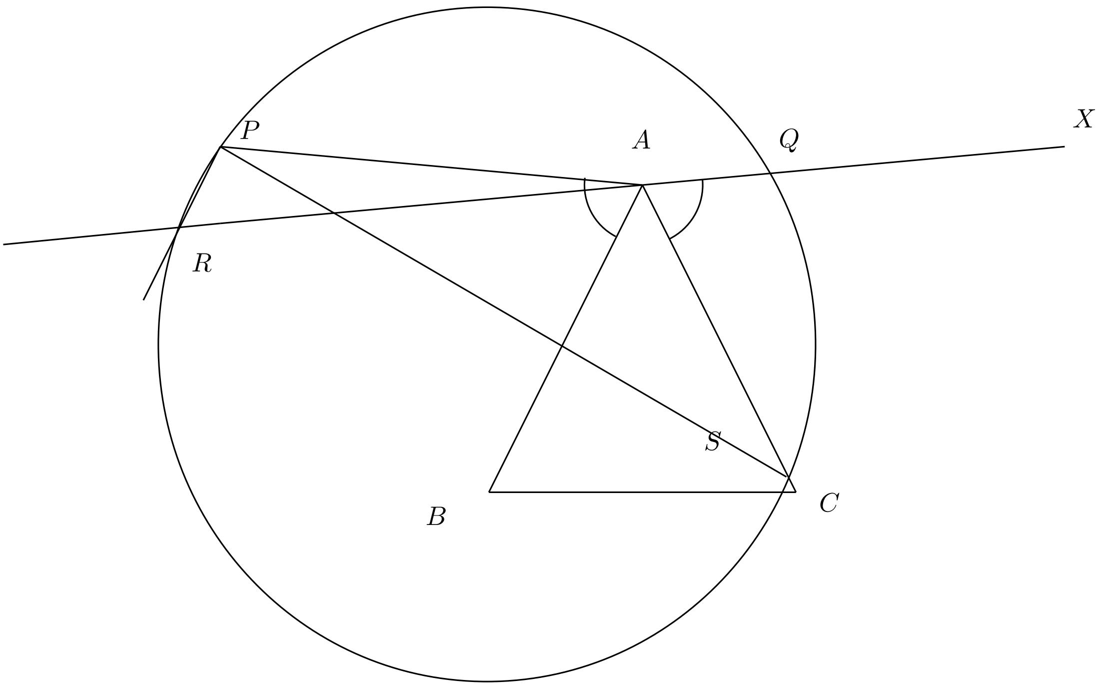

図 5

いれば用意である．（図 6）

定理 3　3 角形の面積を二等分線のうち，特定の 2 辺を横切るものは，ある 1 つの双曲線に接する．

このあたりから初等幾何ばかりでというわけにはいかなくなるが，ぎりぎり高校数学にはひっかかっていると思われる．(1) を見ればこの定理は容易に予想できると思う．しかし，話を単純化するために次のように座標で考える．

問題 1 直線

$$\frac{x}{a} + ay = 1 \tag{2}$$

はどのような曲線に接するか．

解　a について整理すると

$$a^2y - a + x = 0$$

$D = 0$ とおくと

$$xy = \frac{1}{4} \tag{3}$$

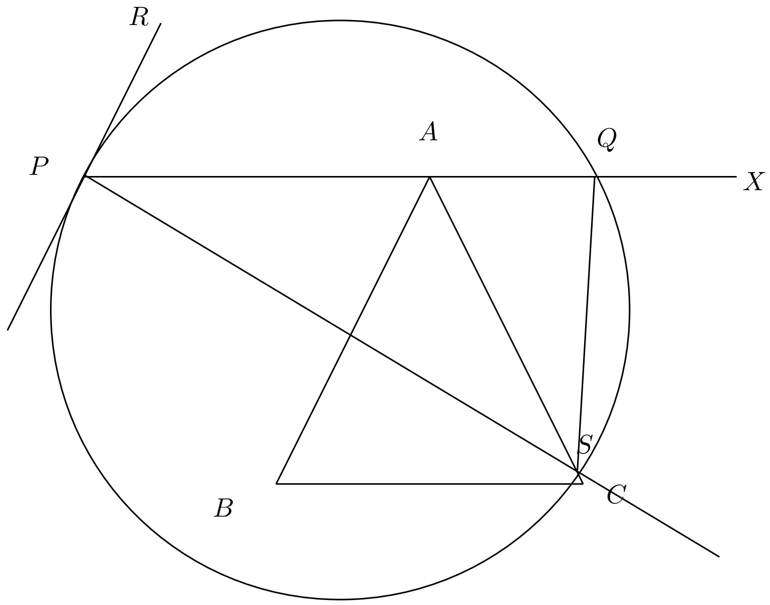

図 6

これが求める曲線の方程式である．直線 (2) はどのような直線かというと，x 切片と y 切片の積が 1 になるような直線である．たとえば図 7 に示したような $\triangle ABC$ の面積を 2 等分する直線である．しかしその直線は斜線部分を通らなければならないので，3 角形を 2 等分する直線が接する曲線も式 (3) の実線部分 $\left(\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1\right)$ の範囲に限られる．逆に，点 P が斜線部分にあれば，P を通り，$\triangle ABC$ を 2 等分し，なおかつ辺 OA, OB を横切る直線は必ずひけることになる [証明略]．ただしその本数に注意を要する．P が $\triangle AGM$ または $\triangle BGN$ の中にある場合は引ける直線は 1 本であるが，それ以外の部分，図で言うと双曲線と 2 直線に囲まれるわずかな部分に P がある場合は 2 本引ける．境界については別に考える必要があるが，後述する．

図 7 では面積の二等分線が特定の 2 辺 (OA, OB) を横切る場合のみ考えたが，すべての二等分線について考えると，3 種類の双曲線のどれかに接していることになる.(図 8)

この 3 本の双曲線は 3 角形の辺のうち 2 本を延長した直線を漸近線にもつ．また 3 本の中線のうち 2 本と接する．その接点は 3 角形の中点を結んだ直線と中線の交点である．

定理 4 任意の 3 角形について，平面上の任意の点 P を通り，3 角形の面積を 2 等分する直線は必ずひける．また，その本数は 3 本以下である．[証明略]

図 8 で述べると，斜線部分以外の領域に P があるときは，二等分線の本数は 1 である．斜線部分に P があるときは 3 本である．境界上にある場合は 2 本である．ただし，点 D, E, F については 1 本である (中線).

さて，3 角形内部に P がある場合の作図法について考えてみよう．(図 9)

P の位置が 3 角形の内部にあるだけで，行うことは基本的に同じである．ただ，前述のように P の位置によっては複数本 2 等分線がかけるのでそれぞれの頂点について多くて 3 回同じような作図を必要とする場合があるので注意が必要である．あらかじめ境界となる双曲線がかいてない状態では，全部確かめなければなら

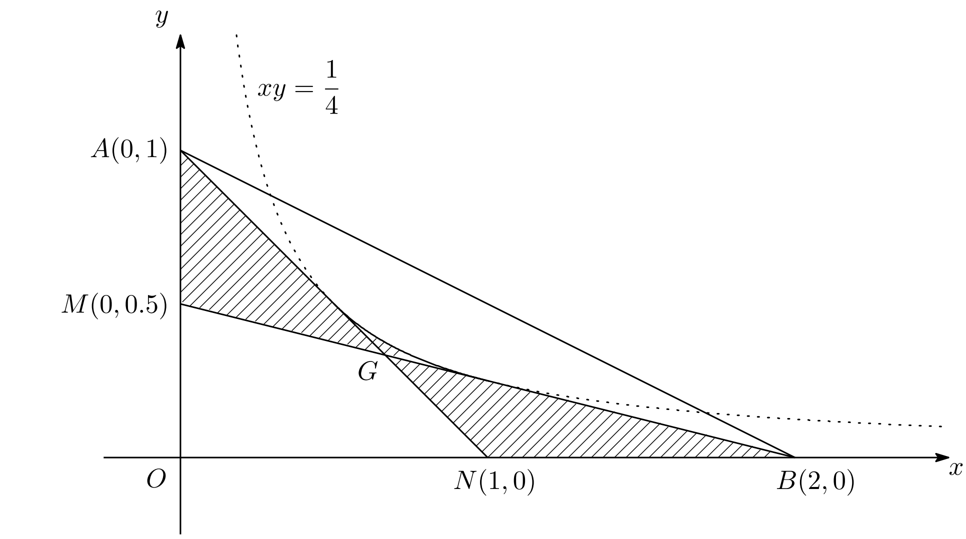

図 7

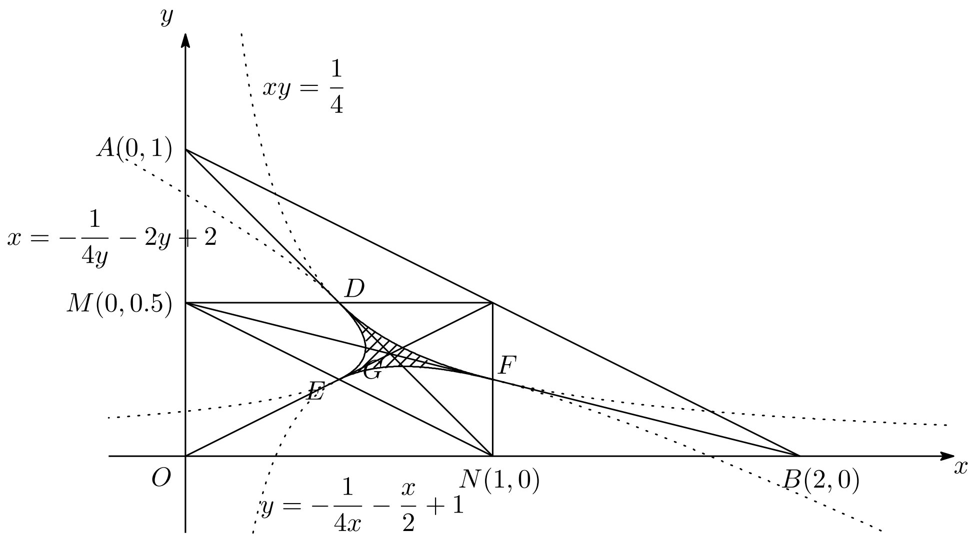

図 8

ないかも知れない.

問題 2 点 P を通り $\triangle ABC$ の面積を二等分する直線の本数を $n(P)$ と表すことにする．$n(P) > 1$ である P が存在する領域の面積は $\triangle ABC$ の面積の何倍か.

解　図 8 の場合について調べれば，適当な一次変換を施すことによりあらゆる 3 角形を実現でき，また求める面積比も変らない．さらに図 7 のようにさらに小さい部分を調べることで問題は解決できる.

$$\triangle AGM + \triangle BGN = \frac{1}{3}$$

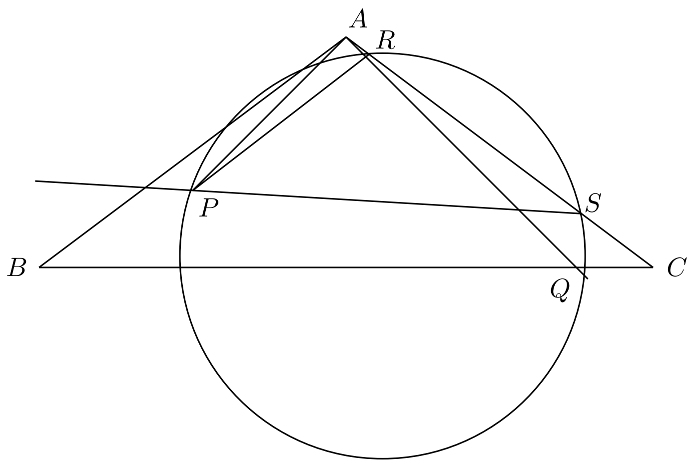

図 9

双曲線の実線部分と 2 直線に囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{4x} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} (1-x)dx - \int_{\frac{2}{3}}^{1} \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right) dx \\ &= \frac{1}{4} [\log x]_{\frac{1}{2}}^{1} - \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} - \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}\right]_{\frac{2}{3}}^{1} \\ &= \frac{1}{4} \log 2 - \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{9} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{3} + \frac{1}{18}\right) \\ &= \frac{1}{4} \log 2 - \frac{1}{6}\end{aligned}$$

求める値は

$$\left(\frac{1}{4} \log 2 - \frac{1}{6}\right) \times 3 = \frac{3}{4} \log 2 - \frac{1}{2}$$

これはわずか 2% にも満たない.