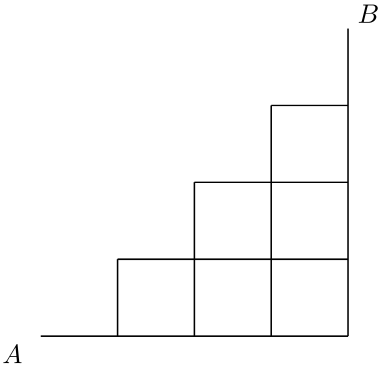
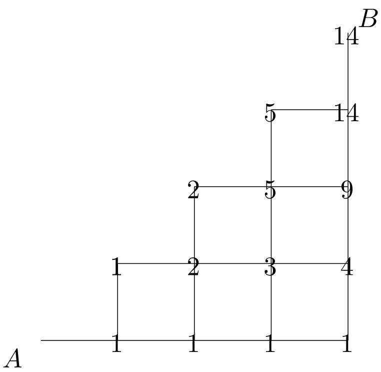
カタラン数が語ること

1　カタラン数の一般項

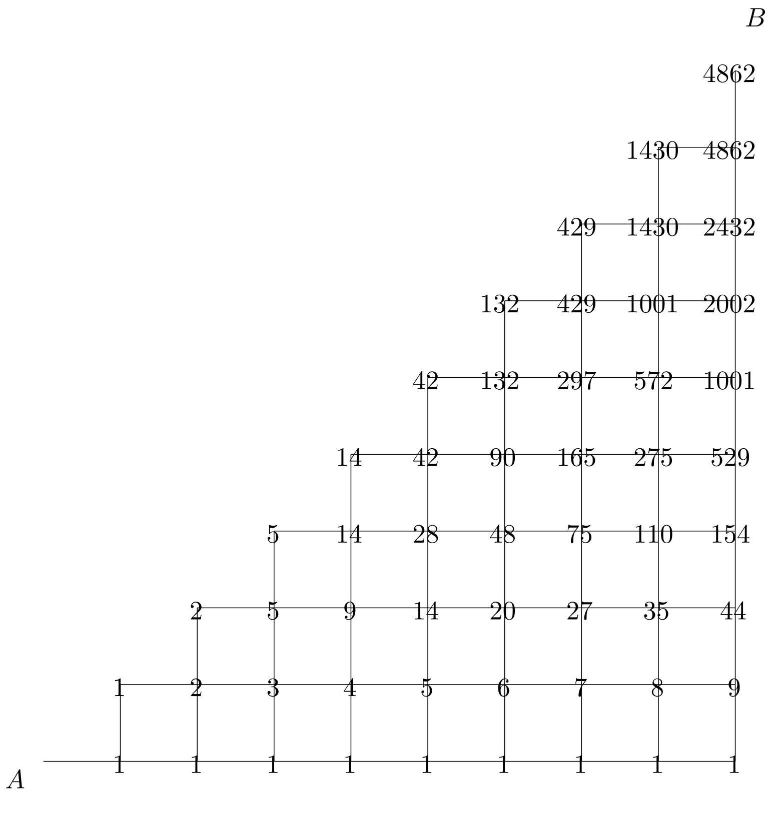
問題 1　下図の A から B まで最短経路を通って行く方法は何通りあるか.





[解]　左図のように数えれば答は 14 通りであることがすぐわかる. パスカルの三角形をつくるときのように直前の格子の数字をたせば求めることができる.

一般の場合を求めるまえに，もう少し大きい格子数の場合はどうなるのか調べてみよう.



このように，格子数が増えていくと，端から端に行く方法の場合の数は

$$1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \cdots$$

と増えていく．このような数列を**カタラン数**と呼ぶ．カタラン数の一般項を求めてみよう．

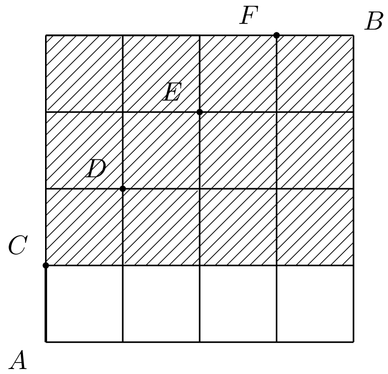


図 1

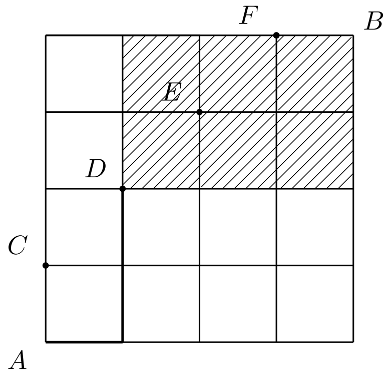


図 2

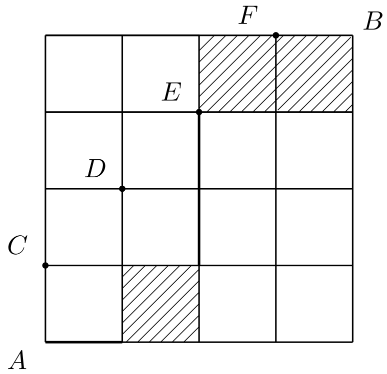


図 3

まず，正方形の格子状の最短経路は 4×4 の場合は ${}_8\mathrm{C}_4$ である．ここから点 C, D, E, F を一度は通る場合を除いてやればよい．まず，点 C を通る場合は図の斜線部分であり，${}_7\mathrm{C}_3$ 通りである．次に図 2 のように点 C を通らずに点 D を通る場合は太い線と斜線部分を通る場合で ${}_5\mathrm{C}_2$ 通りである．次に図 3 のように点 C, D を通らずに点 E を通る場合は ${}_2\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1$ 通りである．

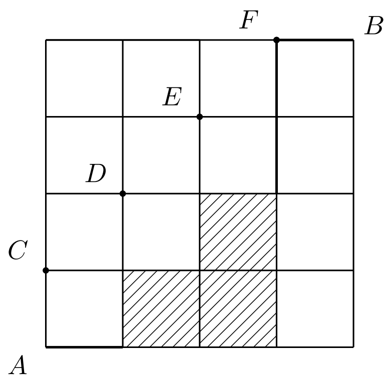


図 4

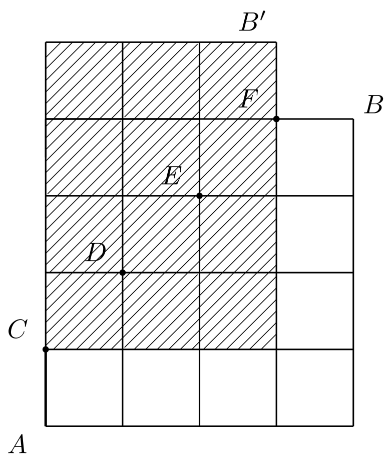


図 5

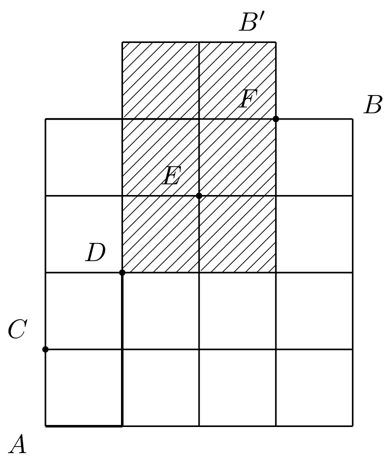


図 6

次に図 4 のように点 C, D, E を通らずに点 F を通る場合は最初が三角形の部分となり，これまでほど単純ではないことがわかる．そこで図 1 から図 4 の後半部分つまり最初に点 C, D, E, F に到達したあとの部分を直線 CF について対称移動してみる（図 5〜図 8）．そうすると，行き先が B' に変ってしまうが，対称移動する前と一対一に対応しているので場合の数は変らない．この図 5〜図 8 を重ね合わせてみると，図 9 のように A から B' に行く最短経路の場合と一致することがわかる．つまり最初の場合の数（A から B までの最短経路の総数）から除かなければならないのは,

$${}_8\mathrm{C}_3 \text{通り}$$

であることがわかる．つまり 4×4 の場合のカタラン数は

$${}_8\mathrm{C}_4 - {}_8\mathrm{C}_3 = 70 - 56 = 14$$

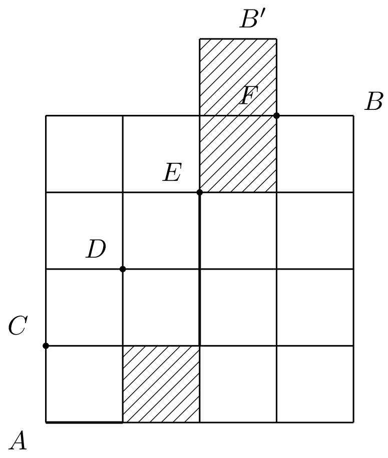


図 7

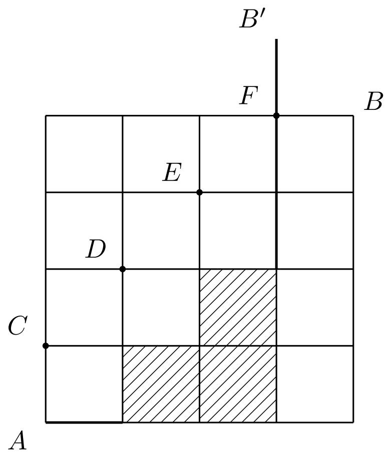


図 8

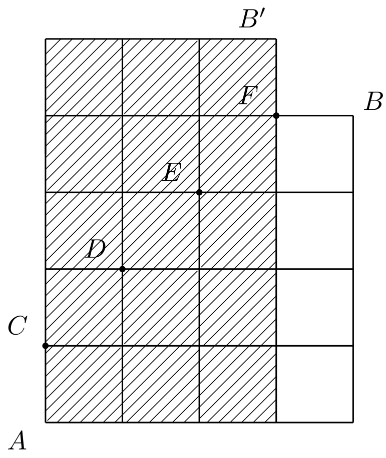


図 9

となる．一般の場合，つまり $n \times n$ の格子に関するカタラン数は

$$
\begin{aligned}
&{}_{2n}\mathrm{C}_n - {}_{2n}\mathrm{C}_{n-1} \\
=&\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}
\end{aligned} \tag{1}
$$

n 番目のカタラン数を $C(n)$ で表すと，

$$
\boxed{C(n) = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}} \tag{2}
$$

(2) に $n = 0$ を代入して 0 番目のカタラン数 $C(0) = 1$ を定義することもできる．

2　カタラン数とパスカルの三角形

1
1　1
1　2　1
1　3　3　1
1　4　6　4　1
1　5　10　10　5　1
1　6　15　20　15　6　1
1　7　21　35　35　21　7　1
1　8　28　56　70　56　28　8　1

表 1

(2) より言えることはパスカルの三角形のちょうど真ん中の数字の列（表 1 の赤字の部分）を $1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ で割っていけばカタラン数を生成できるということである．また (1) より，表 2 のようにパスカルの三角形の

真ん中の数字からその左隣（緑色の部分，あるいは右隣の数字でも同じである）を引くことによっても生成できる．

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

表 2

1

1 0

1 1

1 2 0

1 3 2

1 4 5 0

1 5 9 5

1 6 14 14 0

1 7 20 28 14

1 8 27 48 42 0

1 9 35 75 90 42

1 10 44 110 165 132 0

1 11 54 154 275 297 132

1 12 65 208 429 572 429 0

1 13 77 273 637 1001 1001 429

表 3

また，カタラン数はパスカルの三角形の半分を全て 0 にした場合にちょうど真ん中の数字の列として現れる（表 3 の赤字の部分）．これは最初の格子状の最短経路がそもそも二項係数であったことを考えると当然である．

3　カタラン数の漸化式

別の視点ででカタラン数を数えてみよう．

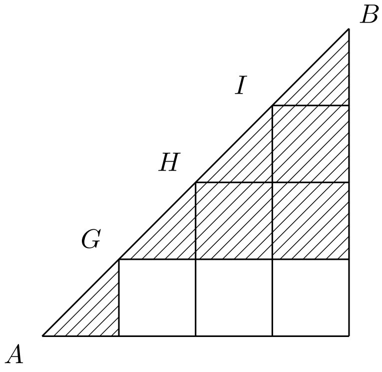


図 10

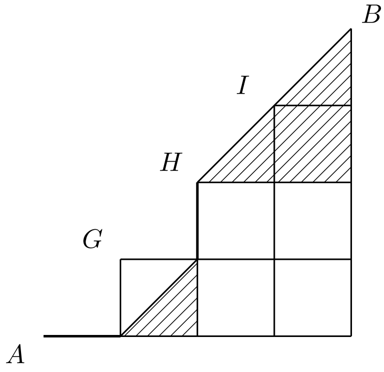


図 11

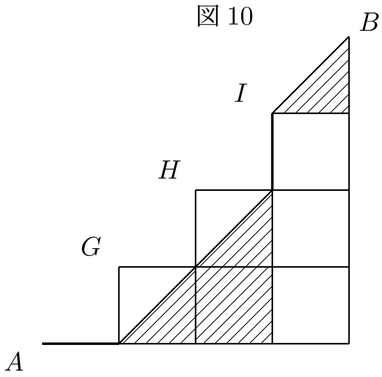


図 12

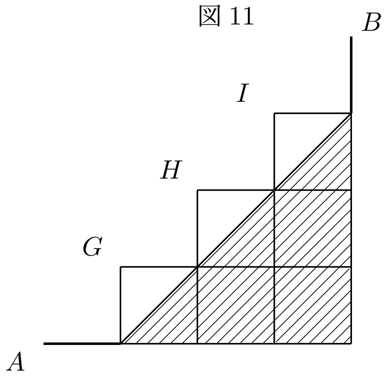


図 13

図 10 のように点 G を通る場合は

$$C(3) \text{ 通り}$$

G を通らずに H を通る場合は（図 11）

$$C(1)C(2) \text{ 通り}$$

G, H を通らずに I を通る場合は（図 12）

$$C(2)C(1) \text{ 通り}$$

G, H, I のどれも通らない場合は（図 13）

$$C(3) \text{ 通り}$$

これらのことから

$$C(4) = C(3) + C(1)C(2) + C(2)C(1) + C(3)$$

という式が成り立つ．一般に次の漸化式が成り立つ．

$$\boxed{C(n) = C(n-1) + C(1)C(n-2) + C(2)C(n-3) + \cdots + C(n-1) = \sum_{k=0}^{n-1} C(k)C(n-k-1)}$$

4　カタラン数の母関数

　数列

$$C(0), C(1), C(2), \cdots, C(n)$$

の母関数を

$$y = C(0) + C(1)x + C(2)x^2 + \cdots + C(n)x^n$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
y^2 &= C(0)C(0) \\
&\quad + \{C(0)C(1) + C(1)C(0)\}\, x \\
&\quad + \{C(0)C(2) + C(1)C(1) + C(2)C(0)\}\, x^2 \\
&\quad + \cdots \\
&\quad + \{C(0)C(n-1) + C(1)C(n-2) + C(2)C(n-3) + \cdots + C(n-1)C(0)\}\, x^{n-1} \\
&\quad + \cdots
\end{aligned}$$

となり，漸化式の右辺は y^2 の x^{n-1} の係数に等しい．$C(0)C(0) = 1 = C(1)$ であるから

$$y^2 = C(1) + C(2)x + C(3)x^2 + \cdots + C(n)x^{n-1} + \cdots$$

　ゆえに，

$$xy^2 - y + 1 = 0$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

分母をはらって

$$2xy = 1 \pm \sqrt{1-4x}$$

$x = 0$ のとき，$y = 1$ であるので，

$$2xy = 1 - \sqrt{1-4x}$$

したがって，求める母関数は

$$y = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

である．この母関数を級数展開したとき，x^n の係数がカタラン数 $C(n)$ である．$(1-4x)^{\frac{1}{2}}$ の n 階導関数は

$$\begin{aligned}
\left\{(1-4x)^{\frac{1}{2}}\right\}^{(n)} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)(-4)^n(1-4x)^{\frac{1}{2}-n} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1-2}{2}\cdot\frac{1-4}{2}\cdots\frac{1-2n+2}{2}(-4)^n(1-4x)^{\frac{1}{2}-n} \\
&= \frac{1(1-2)(1-4)\cdots(1-2n+2)}{2^n}(-4)^n(1-4x)^{\frac{1}{2}-n} \\
&= -\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n}4^n(1-4x)^{\frac{1}{2}-n} \\
&= -1\cdot 3\cdots(2n-3)\cdot 2^n(1-4x)^{\frac{1}{2}-n} \\
&= -\frac{(2n-3)!}{(n-2)!}\cdot 4(1-4x)^{\frac{1}{2}-n}
\end{aligned}$$

となる．$-(1-4x)^{\frac{1}{2}}$ を級数展開したときの x^{n+1} の係数は

$$\frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n+1)!}\cdot 4=\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!2n}\cdot 4=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}\cdot 2$$

よって y を級数展開したときの x^n の係数つまり $C(n)$ は

$$C(n)=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}=\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$$

となり，やはり前出のカタラン数の公式が求まったわけである．

5　カタラン数が現れる現象

問題 2　会費 5000 円のパーティーに 10 人が参加した．5 人は 5000 円札を 1 枚ずつもっている．あとの 5 人は 1 万円札しかもっていない．釣り銭が不足しないように会費を集める方法は全部で何通りあるか．ただし人の区別はせず，お金の出し方つまり 5000 円と 1 万円の順列のみを考える．

[解]　いわゆる「つり銭問題」である．1 万円払う人数がそれまでの 5000 円払った人数を超えなければいいので，これはカタラン数 $C(5)$ を求めればよい．

$$C(5)=\frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6}{6\times 5\times 4\times 3\times 2}=42\ (\text{通り})$$

問題 3　平面上凸 n 角形を対角線によって三角形に分割する方法の数 $T(n)$ を求めよ．ただし互いに交わらない対角線のみを使用する．

[解]　1751 年にオイラーがゴールトバッハへ出した手紙の中の問題である．

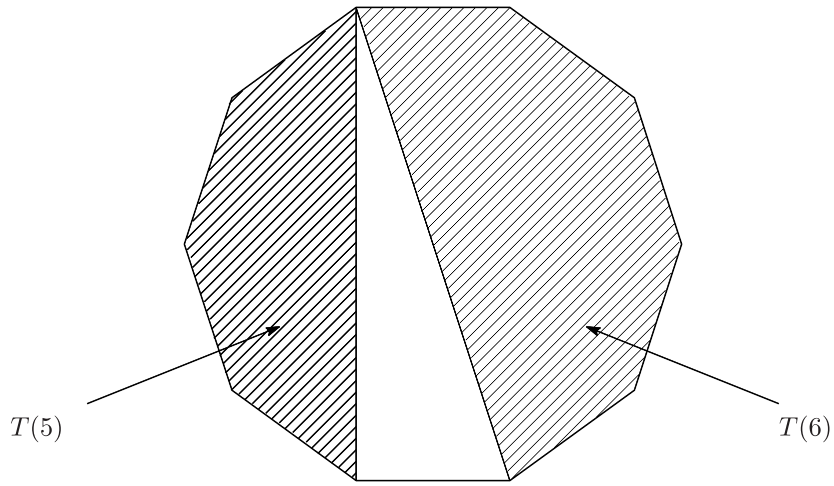


図 15

$$T(n)=T(n-1)+T(3)T(n-2)+T(4)T(n-3)+\cdots+T(n-1)$$

という漸化式が成り立つ．これは例えば 10 角形の場合でいうと

$$T(10)=T(9)+T(3)T(8)+T(4)T(7)+T(5)T(6)+\cdots+T(9)$$

であるが，このうち $T(5)T(6)$ が図 15 に相当する．辺を一つ固定して三角形を一つ切り取るところがこの考え方のポイントである．単純に多角形を二等分する考え方では重複がおこりうまくいかない．一方カタラン数の漸化式を少し変形して

$$C(n-2) = C(n-3) + C(1)C(n-3) + C(2)C(n-4) + \cdots + C(n-3)$$

である．$T(3) = C(1) = 1$ であるから，$T(n)$ の漸化式は $C(n)$ を 2 つずらしたものに過ぎないことがわかる．

$$T(n) = C(n-2)$$

よって 5 角形の分割は

$$T(5) = C(3) = 5$$

6 角形は 14 通りとなる．

そのほかカタラン数が現れることがらは色々ある．例えば n 組のカッコの並べ方の問題などもカタラン数となる．三組であると，

$$((())), ()(()), ()()(), (())(), (()())$$

の 5 通りである．カッコの中に文字を入れてやると

$$((a_1a_2)a_3)a_4, (a_1a_2)(a_3a_4), a_1(a_2(a_3a_4)), a_1((a_2a_3)a_4), (a_1(a_2a_3))a_4$$

となり，文字 4 つでカタラン数 $C(3)$ に対応している．文字をトーナメントの組合せに置き換えると，そのままトーナメント表の作り方の場合の数となる．このほかに円周上の $2n$ 個の点を交わらずに 2 点ずつ線分で結ぶ方法の数もカタラン数となる．このように「カタラン数が語ること」は数多くある．

カタラン (Eugène Charles Catalan)(1814-1894)

カタランは 1814 年ベルギーのブルージュに生まれる．父は宝石商（あるいは宝石職人）でジョセフ・カタランと言った．カタランは一人息子であった．1825 年彼はパリに行き，数学をエコール・ポリテクニークで学ぶ．そこでジョゼフ・リウヴィルと出会う (1833 年)．1834 年大学を追放され，シャロン・アン・シャンパーニュて卒業後のポストを得る．その後エコール・ポリテクニークに戻り，1841 年，リウヴィルの助力により数学の学位を得る．彼は Charlemagne College に幾何学を教えに行っている．彼は政治的に活動的で，左翼色が強く，1848 年革命にも加わったけれども，キャリアはすばらしく下院議員まで務めた．1849 年にフランス警察により違法な教材所持の疑いで家宅捜索を受けたが何も見つからなかった．1865 年リエージュ大学 は彼を解析学の学部長として向かえられる．1879 年ベルギーにおいて編集者となり，Paul-Jean Busschop の理論の解説を出版する．この理論は Busschop 自身によって経験主義に過ぎるということで捨て去られていた．1883 年ベルギー科学アカデミーにて数論の分野の研究を行う．最初に学部長になったリエージュにて生涯を閉じる．79 歳.

彼は連分数，幾何学，数論，組合論の研究を行う．彼は単一平面（$\mathbb{R}^3$ の周期的極小平面）を発見し名づける (1855)．それより前に有名なカタラン予想[*1]を発表し，2002 年ルーマニアの数学者プレダ・ミハイレスク

[*1] 不定方程式 $x^a - y^b = 1$ の自然数解は $3^2 - 2^3 = 1$ のみである [1]

により証明される．彼は組合せ問題を解くためにカタラン数を発表した*2.

参考文献

[1] 「ウィキペディア」<http://ja.wikipedia.org/wiki/>

[2] 「Wikipedia」<http://en.wikipedia.org/wiki/>

*2 参考文献 [2] を翻訳．カナ名がわからないものは原文のままとした.