15 パズルの数理

15 パズル (15 puzzle) は 15 ゲームというような商品名で売られている場合もあるが，図 1[*1]のような 4×4 のピースの 16 番目のピースをはずしてスライドしながら並べるという，きわめてポピュラーなパズルである．誰でも一度は手にしたことがあると思われる．このピースを一度全部ケースから取り出し，再び適当にケースに戻すと，1/2 の確率でスライドしても元通りにはならない．しかしこの元通りにならない状態から任意の 2 個のピースを入れ替えるとスライドのみで元通りにすることができる．これらのことを数学的に考察してみよう．

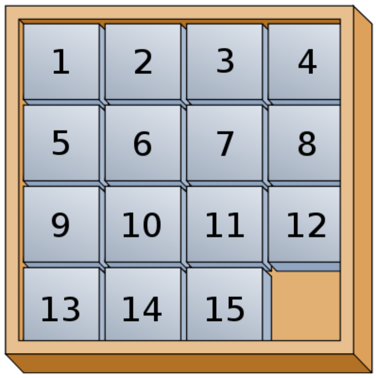


図 1

1　置換

異なる n 個のものを並べ替える方法，あるいは並べ替える操作（変換）を**置換** (substitution) と呼ぶ．n 個の置換は全部で $n!$ 個ある．置換を表すのに通常 σ（シグマ），τ （タウ）などのギリシア文字の小文字を用いる．

σ, τ が X_n 上の置換であるとき，

$$(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau(i)) \quad , \forall i \in X_n$$

という関係で，置換 σ, τ の積 $\sigma\tau$ を定義する．つまり i が集合 X_n の要素であるとき，変換 τ を行いその後 σ を行うとき，その合成を $\sigma\tau$ と表す．$\sigma \cdot \tau$ と表すこともあるが，$\cdot$ を省略する場合も多い．

つまり置換の積とは，置換を X_n から X_n への上への写像と見たときの合成写像 $\sigma \circ \tau$ にほかならない．置換の積を $\tau\sigma = \sigma \circ \tau$ と 逆に定義する流儀も存在する ので注意を要する．恒等写像に相当する置換を**恒等置換**と呼び，ι（イオタ）で表す．逆写像に相当する置換を**逆置換**と呼び σ^{-1} で表す．

例えば $X_6 = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ の場合

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \tag{1}$$

のように置換を表す 1 行目が置換前の並びを表し，2 行目が置換後を表す．ここで注意しなければならないのはそれぞれの数字は X_n の要素そのものであって，何番目にあるかという数字ではない．置換の積を考えるときに，往々にしてこの区別がつかなくなることがあるが，最初の定義に戻って確認する必要がある．15 パズルを考察することは，空白のコマを 16 と考えて（以後空白のコマと 16 は同一とみなすことにする），

$$X_{16} = \{1, 2, 3, \cdots, 16\}$$

上の置換について考えることに等しい．

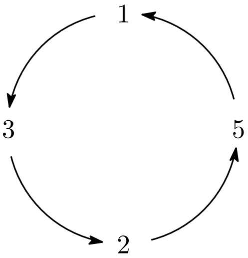


図 2

2　巡回置換

(1) の置換 σ は 4 と 6 は全く動かず（替わらず）1,3,2,5 が循環している．（図 2）このように一部が全く替わらず，それ以外は巡回しているような置換

*1 図 1 および図 3 は [4] における著作権を放棄したグラフィックデータを使用．

σ を**巡回置換**と呼ぶ．また巡回している要素の個数を巡回置換の**長さ**と呼ぶ．特に，長さが 2 の巡回置換を**互換**と呼ぶ．巡回置換に関しては (1) のような表し方のほかに

$$\sigma = (1, 3, 2, 5)$$

と簡便な表現方法もある．（小括弧ではなく大括弧を使う場合もある．また区切りのコンマは省略する場合もある）．このように表した場合，次のように同じ巡回置換も異なった表し方ができる．

$$\sigma = (1, 3, 2, 5) = (3, 2, 5, 1) = (2, 5, 1, 3) = (5, 1, 2, 3)$$

一般の置換はいくつかの巡回置換の積として表現できる．例えば

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 8 & 9 & 5 & 6 & 1 & 3 & 2 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

の場合，

$$\sigma_1 = (1, 4, 5, 6), \sigma_2 = (2, 8), \sigma = (3, 9, 10, 7)$$

とおくと，

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

と表せる．これらの巡回置換同士は独立している．つまりそれぞれ共通の要素を持たない．よって，これらの積は交換可能である．よって，

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 = \cdots$$

このことから

$$\sigma^n = \sigma_1^n \sigma_2^n \sigma_3^n$$

がいえる．今巡回置換 σ_1 の長さが m であるとき

$$\sigma_1^m = \iota$$

であるから，次のことが言える．

n 個の要素をもつ X_n 上の置換 σ について，

$$\sigma^{n!} = \iota$$

このことは，どんな置換でも $n!$ 回繰り返せば必ず元に戻ることを表している．

X_n 上の置換は積について閉じている．また結合則も成り立つ．恒等置換 ι について

$$\iota\sigma = \sigma\iota = \sigma$$

が成り立つ．つまり単位元をもつ．また逆元に相当する逆置換をもつ．以上のことからこの置換の全体は**群 (group) をなす**．この群を n **次対称群**と呼び，S_n と書く．S_n の要素の個数は n ではなく，$n!$ であることに注意しなければならない．

3　偶置換，奇置換

定理 1 全ての置換は互換の積に分解できる．

［証明］任意の置換は巡回置換の積で表せるので，巡回置換が互換の積で表せることを示せばよい．今，巡回置換

$$\sigma_1 = (i_1, i_2, i_3, \cdots, i_k)$$

を考えた場合，

$$\sigma_1 = (i_1, i_k)(i_1, i_k - 1)(i_1, i_k - 2) \cdots (i_1, i_2)$$

と表せる（右から順に行うことに注意）．よってこの定理は証明された．　　［証明おわり］

定理 2 ある置換を互換の積で表す方法は一意的ではないが，その互換の個数が偶数か奇数かは，元の置換が同一であれば変わらない．

［証明］交代多項式

$$\begin{aligned} f =& (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_3) \cdots (x_1 - x_n) \\ & \times (x_2 - x_3)(x_2 - x_3) \cdots (x_2 - x_n) \\ & \times (x_3 - x_4) \cdots (x_3 - x_n) \\ & \times \cdots\cdots\cdots \\ & \times (x_{n-1} - x_n) \end{aligned}$$

を考える．f に互換を奇数個作用させると $-f$ になる．従って，ある置換が偶数個の互換でも奇数個の互換でも書けるとすると，$f = -f$ となって矛盾する．よって，定理は証明された．　　［証明おわり］

偶数個の互換の積で表されるものを**偶置換**，奇数個の互換の積で表されるものを**奇置換**と呼ぶ．

定理 3 S_n のうち偶置換，奇置換の個数はともに $\dfrac{n!}{2}$ である．

［証明］偶置換全体を A_n，奇置換全体を B_n とおく．

$$\sigma_0 = (1, 2)$$

とすると，任意の $\sigma \in A_n$ について，$\sigma\sigma_0 \in B_n$ が 1 対 1 に対応している．つまり A_n の要素の個数と，B_n の要素の個数は同数である．よって定理は証明された．　　［証明おわり］

交代式に偶置換を行ってもその交代式は変わらない．対称式の場合はあらゆる置換によっても変わらない．これが A_n を**交代群**と呼ぶゆえんである．

定義 1 置換 σ の符号 (sign) を次のように定義する．[*2]

$$\mathrm{sign}(\sigma) = \begin{cases} 1 & \sigma \in A_n \\ -1 & \sigma \notin A_n \end{cases}$$

[*2] $\mathrm{sgn}(\sigma)$ あるいは $\mathrm{sign}\sigma$ と表す流儀もある．

4　15 パズルの不可能問題

問題 1 図 1 の状態の 14 と 15 を入れ替えた状態（図 3）から，駒をスライドすることで図 1 の状態にせよ．

［解］答は「不可能」である．そのことを以下で述べる．

駒をスライドするということは，空白の箇所を 16 の駒があると仮定すると，この 16 の駒と隣同士の駒との互換である．隣同士と言っても斜めは駄目で，上下または左右のみの互換であるところがミソである．つまり 1 回のスライド操作で，16 の駒は図 4 の斜線の場所から斜線で無い場所に，あるいはその反対に斜線の無い場所から斜線の場所にしか移動できない．斜線から斜線に，あるいは白いマスから白いマスへは移動できないのである．つまり 16 が斜線の場所にあるということは，図 1 の状態からみたら偶置換でなければならない．図 3 の状態は 16 が斜線の場所にあるが，14 と 15 が入れ替わっているので明らかに奇置換である．この状態からどんなスライド操作をしても図 1 の最終形にすることはできない．

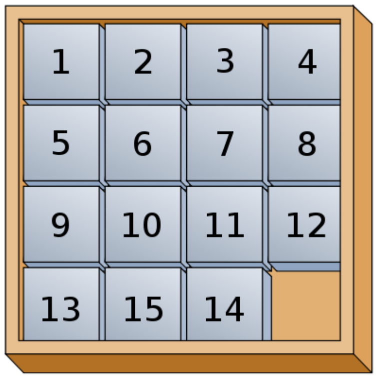


図 3

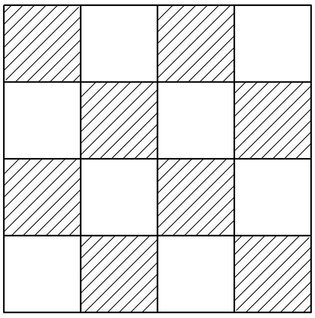


図 4

この問題はサム・ロイド (1841-1911 米) が 1000 ドルの賞金をかけて出題したものである ([6] によれば 1870 年代前半のことのようである．図 9 参照)．当時の貨幣価値から考えるとこれは破格の大金である．[4] によれば，ロイドは 15 パズルを自分の発明であると生涯主張し続けたが，それより少し以前にすでに作っていた人がいたようである．[9] によれば，Noyes Chapman というニューヨークの郵便局長に特許が与えられたとある．とても単純なゲームなので，むしろ 19 世紀後半まで発明されなかったということの方が不思議な気がする．あるいは記録が残っていないだけなのかも知れない．15 パズルがサム・ロイドのパズルと紹介されることがあるが，それはこの懸賞金つき問題の影響が大きいのではないだろうか．ロイドは自身が”14-15 Puzzle”と命名したこの不可能問題に解が無いことを経験的に知っていたものと思われるが，証明されたのは後のことである．

定理 4 15 パズルにおいて，空白のマス（あるいは 16 の駒）はスライド操作によって任意の場所に移動できる．

［証明］ほぼ自明．空白のマスは上下左右に 1 つずつ移動できる（もちろん壁があればその方向は無理）．これを繰り返せば任意の場所に移動できる．［証明おわり］

定理 5 15 パズルにおいて，特定の 1 つの駒を動かすことなく，空白のマスをその特定の駒がある場所以外の任意の場所に移せる．

［証明］これもほぼ自明．空白のマスを動かす経路を作る際，特定の駒の位置を避ければいいだけである．［証明おわり］

一つの駒を避ける以外にも，1 行 1 列，1 行 2 列，2 行 3 列にある三つの駒を避けて通るようなこともでき

る．このことを定理 8 の証明に用いる．

定理 6 15 パズルにおいて，特定の駒を任意の場所に移動できる．

［証明］これもほぼ自明．前定理の操作により，特定の駒の隣に空白のマスをもってこれる．そしてその空白マスに特定の駒を移動する．この操作を繰り返せば特定の駒は自由にどこにでも行ける．ただし，その特定の駒以外の駒の位置は問題にしていない．［証明おわり］

定理 7 15 パズルにおいて，特定の駒を別の特定の駒一つを動かすことなく，動かさない特定の駒以外の任意の場所に移動できる．

［証明］自明の定理が続くが，これも動かす駒の経路を動かさない駒からはずせばよい．［証明おわり］

やはり，一つの駒を避けるだけでなく，1 行 1 列，1 行 2 列にある二つの駒を避けて移動するということも可能である．このことを定理 8 の証明に用いる．

定理 8 15 パズルにおいて，任意の長さ 3 の巡回置換ができる．

［証明］

(1) 駒 A を 1 行 1 列の位置に移動する．
(2) 駒 B を 1 行 2 列の位置に移動する．その際，駒 A を動かしてはいけない．
(3) 駒 C を 2 行 1 列の位置に移動する．その際，駒 B,C を動かしてはいけない．
(4) 空白マスを 2 行 2 列の位置に移動する．その際，駒 A,B,C を動かしてはいけない．

これらの操作はあとで逆を行うので全て記憶あるいは記録しておく．

(5) ABC を巡回させる．
(6) (4)(3)(2)(1) の順に逆を行う．［証明おわり］

定理 9 S_n は

$$(1,2),(1,3),(1,4),\cdots,(1,n)$$

の $n-1$ 種類の互換で生成される．

［証明］例えば

$$(2,4)=(1,2)(1,4)(1,2)$$

のように任意の互換を作ることができる．一般に $a\neq b$ のとき

$$(1,a)(1,b)(1,a)=(a,b)$$

$$\begin{array}{c} 1,a,b \\ \downarrow \\ a,1,b \\ \downarrow \\ a,b,1 \\ \downarrow \\ 1,b,a \end{array}$$

よって全ての S_n の元を生成できる．［証明おわり］

定理 10 B_n（奇置換の集合）は

$$(1,2),(1,3),(1,4),\cdots,(1,n)$$

の $n-1$ 種類の互換の奇数個の積で生成される．

［証明略］定理 9 より明らか．

定理 11 A_n は

$$(1,2),(1,3),(1,4),\cdots,(1,n)$$

の $n-1$ 種類の互換の偶数個の積で生成される．

［証明略］定理 9 より明らか．

問題 2 15 パズルにおいて図 1 から見て偶置換の任意の並びでなおかつ 16 の位置が図 4 の斜線の位置ならば，スライドすることにより図 1 の状態に戻すことができることを証明せよ．

［証明］任意の偶置換を互換で表すと，偶数個の互換の積になることはすでに述べてある．この互換の積のうち右から（あるいは左から）2 個ずつの積を取り出して考えてみよう．その互換の 2 つの要素がどちらも等しい場合，つまり同じ種類の互換の場合はこの 2 個の積は恒等置換であり，無い（0 個の互換）に等しい，

$$(a,b)(a,b)=\iota$$

2 つの互換の要素のうち一つだけ同じものがある場合を考えると，例えば $(1,3)(1,4)=(1,4,3)$ のように，長さ 3 の巡回置換に置き換えられる．一般に

$$(a,b)(a,c)=(a,c,b)\quad b\neq c$$

次に互換の 2 の要素が全て異なる場合について考えてみよう．例をあげると，

$$(1,2)(3,4)=(1,2)(1,3)(3,1)(3,4)=(1,3,2)(3,4,1)$$

のように長さ 3 の巡回置換の二つの積に置き換えることができる．一般に

$$(a,b)(c,d)=(a,b)(a,c)(c,a)(c,d)=(a,c,b)(c,d,a)\quad a\neq c\neq b, a\neq d\neq b$$

　つまり，偶数個の互換の積は全て長さ 3 の巡回置換に置き換えることができる．定理 8 より 15 パズルのスライド操作は任意の長さ 3 の巡回置換を作ることができるので，結局スライド操作で任意の偶置換を作ることができる．［証明おわり］

　空白の位置が図 4 の斜線でない部分にある場合は，奇置換に限って元に戻すことができる．

4	13	8	14
3	12	6	9
5	2	11	1
7	15	10	

図 5

問題 3 図 5 のような配置はスライド操作によって図 1 の状態にすることができるかどうか調べよ．

［解］

　図 6 のように 12 個の互換により元に戻るので，スライド操作で図 1 の状態にできる．

定理 12 15 パズルにおいて，スライド操作で元に戻せる配置の左右対称形，あるいは上下対称形は不可能な配置である．対角線についての対称形や点対称は可能は配置である．

$$\to\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&13&8&14\\\hline 3&12&6&9\\\hline 5&2&11&4\\\hline 7&15&10&\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&8&14\\\hline 3&12&6&9\\\hline 5&13&11&4\\\hline 7&15&10&\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&14\\\hline 8&12&6&9\\\hline 5&13&11&4\\\hline 7&15&10&\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4\\\hline 8&12&6&9\\\hline 5&13&11&14\\\hline 7&15&10&\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4\\\hline 5&12&6&9\\\hline 8&13&11&14\\\hline 7&15&10&\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4\\\hline 5&6&12&9\\\hline 8&13&11&14\\\hline 7&15&10&\\\hline\end{array}$$

$$\to\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4\\\hline 5&6&7&9\\\hline 8&13&11&14\\\hline 12&15&10&\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4\\\hline 5&6&7&8\\\hline 9&13&11&14\\\hline 12&15&10&\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4\\\hline 5&6&7&8\\\hline 9&10&11&14\\\hline 12&15&13&\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4\\\hline 5&6&7&8\\\hline 9&10&11&12\\\hline 14&15&13&\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4\\\hline 5&6&7&8\\\hline 9&10&11&12\\\hline 13&15&14&\\\hline\end{array}\to\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4\\\hline 5&6&7&8\\\hline 9&10&11&12\\\hline 13&14&15&\\\hline\end{array}$$

図 6

［証明］スライド操作で元に戻せるということは 16 の駒が図 4 の斜線の場所にあるときは偶置換，白い場所にあるときは奇置換でなければならない．左右対称にすると，16 の駒の場所は白い部分にあるので奇置換でなければならないが，8 個の互換で元に戻せるので偶置換である．よって元に戻せないパターンである．上下対称も同様である．斜めの対象では 16 は斜線部分で 6 個の互換でできるので偶置換である．点対称も同様に考えればよい． ［証明おわり］

問題 3 の解法は理解しやすいが，駒を箱からはずして入れ替えている操作と等しいのでスマートとは言えない．駒に触れないで可能・不可能を判断する方法を考えよう．

定義 2 $X_n = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ 上の置換 σ において，$i < j$ かつ $\sigma(i) > \sigma(j)$ である (i, j) の組の個数を**転倒数**と呼び，$N(\sigma)$ で表す．

転倒数を数えるにはその置換においてある数より前にそれ自身より大きい数が何個あるか数えてゆけばよい．例えば図 5 の場合で言うと，

$$0 + 0 + 1 + 0 + 4 + 2 + 4 + 3 + 6 + 9 + 3 + 11 + 6 + 0 + 5 + 0 = 54$$

である．

定理 13 $N(\sigma)$ が偶数のとき σ は偶置換，奇数のときは奇置換である．

［証明］具体的に考えてみよう，図 6 の 4 個目から 5 個目に移るときの互換は

$$\cdots, 8, 12, 6, 9, 5, \cdots \to \cdots, 5, 12, 6, 9, 8, \cdots$$

である．前後の $\cdots$ の部分は転倒数の 変化 に影響が無いので省略した．5 を前に持っていくことにより，転倒数は 4 減る．8 を後ろにもっていくことによって，転倒数は 1 減って 2 増える．合計で転倒数は 3 減る．この数は奇数である．一般の場合で考えてみよう．仮に $a > b$ とし，a, b の互換を考える．

$$\cdots, a, \underbrace{\cdots\cdots}_{k\ 個}, b, \cdots \to \cdots, b, \underbrace{\cdots\cdots}_{k\ 個}, a, \cdots$$

a と b の間に k 個の数がはさまれているが，$p < b$ である p の個数を h，$b < q < a$ である q の個数を i，$a < r$ である r の個数を j とする．当然

$$h + i + j = k$$

である．b が前に行くことにより，転倒数は $q+r+1$ だけ減って p だけ増える．$+1$ は a を数えたためである．a が後ろに行くことにより，転倒数は $p+q$ 減って，r だけ増える．合計すると，

$$-q-r-1+p-p-q+r=-1-2q$$

これは奇数である．$a<b$ の場合はこの逆になるだけで，転倒数の差が奇数であることに変りはない．一方恒等置換は当然転倒数は偶数，つまり $N(\iota)=0$ であるので，転倒数が奇数であることは互換が奇数回行われたことと等しく奇置換，偶数の場合は偶置換である．［証明おわり］

このことは定義 1 で定めた記号を用いると次のように表すことができる．

$$\mathrm{sign}(\sigma)=(-1)^{N(\sigma)}$$

問題 4 図 7 のような配置はスライド操作によって図 1 の状態にすることができるかどうか調べよ．

9	3	5	6
10	8	1	7
4	14	15	12
11	13	2	

図 7

［解］転倒数は

$$0+1+1+1+0+2+6+3+6+0+2+3+2+13=40$$

偶数なので可能である．

問題 4 の解法も偶奇を問題にすれば良いだけとは言え煩雑である．別の方法を考えてみよう．

図 7 の配置を最終形から見てどのような置換で表わされるか調べてみよう．

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 9 & 3 & 5 & 6 & 10 & 8 & 1 & 7 & 4 & 14 & 15 & 12 & 11 & 13 & 2 & 16 \end{pmatrix} \\
=&\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 6 & 8 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 10 & 11 & 13 & 14 & 15 \\ 3 & 5 & 10 & 14 & 15 & 11 & 13 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 16 \\ 16 \end{pmatrix} \\
=&(1,9,4,6,8,7)(2,3,5,10,14,13,11,15)(12)(16)
\end{aligned}$$

つまり，長さ 6，8 の巡回置換の積で表すことができる．言い換えると 5 + 7 = 12（個）の互換で表されるわけで偶置換ということがわかる．これではこれまでの話と大して違いは無いわであるが，実はこの互換の個数を数える必要はない．巡回置換が何個あるかで偶置換か奇置換かはわかる．図 7 の場合のように (12)(16) のような恒等置換を含めて 4 個の巡回置換の積で表せるとき，その長さをそれぞれ a,b,c,d としよう．つまり

$$a+b+c+d=16$$

である．互換の個数は

$$a+b+c+d-4=12$$

である．つまり，巡回置換が奇数個あれば奇置換，偶数個なら偶置換である．つまり巡回置換のグループの個数だけでいいのである．16 が右下にあればそれもひとつとして数えないといけない．

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

4	8	12	
3	7	11	15
2	6	10	14
1	5	9	13

図 8

問題 5 (1) 図 8 左のような配置はスライド操作によって図 1 の状態にすることができるかどうか調べよ．(図 9 Fig 2. と同じ問題)

(2) 図 8 右のような配置はどうか．(図 9 Fig 3.)

［解］(1) 明らかに 1 つの巡回置換でできているので，この配置は不可能である．
(2) 4 個の巡回置換なので偶置換だが，16 は奇置換の位置なので不可能．

さて，巡回置換の数を数えればよいことはわかったが一体この巡回置換の数はどのくらいになるのだろうか．本題とは離れるが一応解いておこう．

問題 6 15 パズルの駒（空白に相当する駒を含む）16 個をランダムに並べたとき，巡回置換の個数の期待値を求めよ．

［解］細かい説明を記述すると長くなるので割愛するが，16 個の駒のうち特定の駒，例えば 1 を含む巡回置換の長さが k になる確率は一様に 1/16 である．これは 16 面体のサイコロを振って k 番目に 1 が出る確率は全て等しいことと考え方は同じである．駒の総数が n 個の場合の巡回置換の個数の期待値を E_n とすると，当然 $E_1 = 1$，かつ

$$\begin{aligned}
E_n &= \frac{1}{n}\{(1+E_1)+(1+E_2)+(1+E_3)+\cdots+(1+E_{n-1})\} \\
&= 1+\frac{1}{n}(E_1+E_2+E_3+\cdots+E_{n-1}) \\
nE_n &= n+E_1+E_2+E_3+\cdots+E_{n-2}+E_{n-1} \qquad (2) \\
(n-1)E_{n-1} &= n-1+E_1+E_2+E_3+\cdots+E_{n-2} \qquad (3)
\end{aligned}$$

(2) − (3) より，

$$\begin{aligned}
nE_n - nE_{n-1} &= 1 \\
\therefore E_n - E_{n-1} &= \frac{1}{n} \\
\therefore E_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \\
\therefore E_n &= \sum_{k=1}^{16}\frac{1}{k} = \frac{2436559}{720720} \simeq \underline{3.4\cdots Ans.}
\end{aligned}$$

答は単なる調和級数なので，もっと簡単な解法があるのかも知れない．どちらにしても巡回置換の個数は高々 3 程度なので少ないことがわかった．

サム・ロイド (Samuel Loyd,1841-1911)

フィラデルフィアに生まれニューヨークに育つ．14 歳からチェスの問題（将棋で言うところの詰め将棋のようなものと思われる）を作り出す．チェスの腕前はトップクラスという程ではなかったようである．次第にチェスの問題から数学的なパズルの方に興味が移っていった．学校を出たあと，機械工学を学び蒸気機関に関する資格をとるが，エンジニアにはならず，職を転々とし，結局パズルとチェスの問題でで生計を立てるようになった．彫刻や漫画も独学で学んだ．生涯で 10000 作以上のパズルを発表した．代表作の 1 つに”Get off the Earth”がある．デュードニーと親交があったが，デュードニーのパズルを自分の作かのように発表したため，以後関係が悪くなる．[3]（図 9）は彼の死後，息子によって出版されたものである．彼の代表作が網羅されていて，豊富な挿絵を見るだけでも楽しい．すでに著作権保護期間を過ぎているのでインターネットで自由に閲覧できる．また復刻版も出版されているがやや高価である．ま

た 1917 年にはロイドの息子はトーマース・エジソンに父のパズルの映画製作の話を持ちかける．エジソンは学校教育用に無声映画を作っている．[8] においてその貴重な映像を見ることができる．

参考文献

[1] 長岡亮介『線形代数入門』（放送大学，2003 年）

[2] 今井淳，寺尾宏明，中村博昭『不変量とはなにか』（講談社，2002 年）

[3] Sam Loyd 'Sam Loyd's Cyclopedia of 5000 Puzzles, Tricks, and Conundrums (With Answers)' (NEW YORK THE LAMB PUBLISHING COMPANY,1914)

[4] 'Wikipedia' <http://en.wikipedia.org/wiki/>

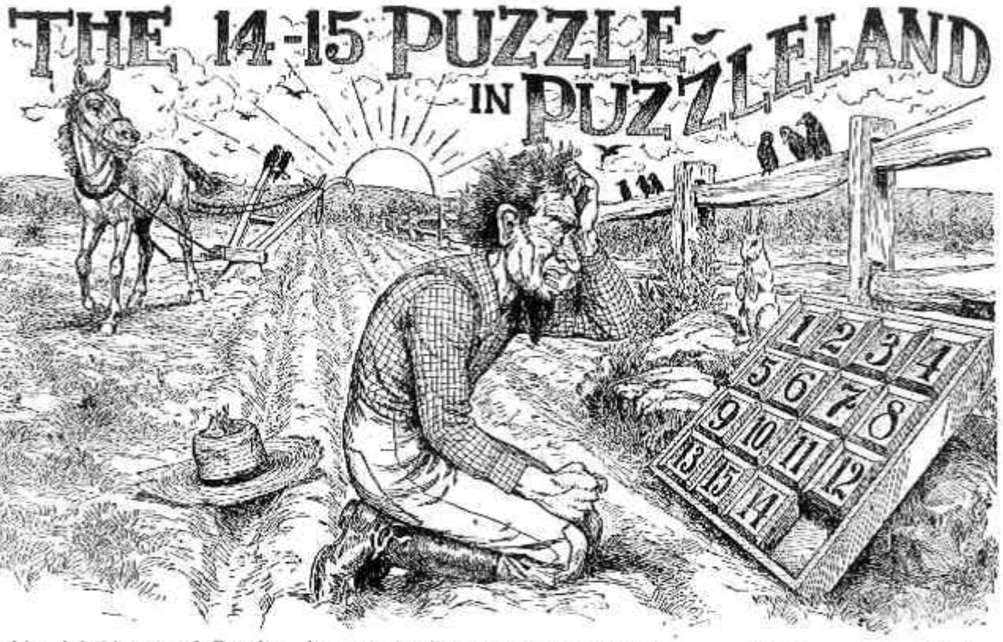
[5] 「15 パズルで数学しよう!」 <http://hp.vector.co.jp/authors/VA010128/math/puzzle/P15-1.html>

[6] 'Biography' <http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Loyd.html>

[7] 'Encyclopædia Britannica' <http://www.britannica.com/EBchecked/topic/350120/Sam-Loyd#>

[8] 'SAM LOYD MOVIES' <http://www.samuelloyd.com/movies.html>

[9] 'Wolfram Math World' <http://mathworld.wolfram.com/15Puzzle.html>



The older inhabitants of Puzzleland will remember how in the early seventies I drove the entire world crazy over a little box of movable blocks which became known as the "14-15 Puzzle." The fifteen blocks were arranged in the square box in regular order, only with the 14 and 15 reversed, as shown in the above illustration. The puzzle consisted in moving the blocks about, one at a time, so as to bring them back to the present position in every respect except that the error in the 14 and 15 must be corrected.

A prize of $1,000, which was offered for the first correct solution to the problem, has never been claimed, although there are thousands of persons who say they performed the required feat.

People became infatuated with the puzzle and ludicrous tales are told of shopkeepers who neglected to open their stores; of a distinguished clergyman who stood under a street lamp all through a wintry night trying to recall the way he had performed the feat. The mysterious feature of the puzzle is that no one seems to be able to recall the sequence of moves whereby they feel sure they succeeded in solving the puzzle. Pilots are said to have wrecked their ships, engineers rush their trains past stations and business generally became demoralized. A famous Baltimore editor tells how he went for his noon lunch and was discovered by his frantic staff long past midnight pushing little pieces of pie around on a plate! Farmers are known to have deserted their plows and I have taken one of such instances as an illustration for the sketch.

Several new problems developed from the original puzzle which are worth giving:

Second Problem—Start again with the blocks as in Fig. 1 and move them so as to get the numbers in regular order, but with the vacant square at upper left-hand corner instead of lower right-hand corner; see Fig. 2.

Third Problem—Start with Fig. 1, turn the box a quarter way round and so move the blocks that they will rest as in Fig. 3.

Fourth Problem—This is to move the pieces about until they form a "magic square," so that the numbers will add up thirty in ten different directions.

Fig 2.

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Fig 3.

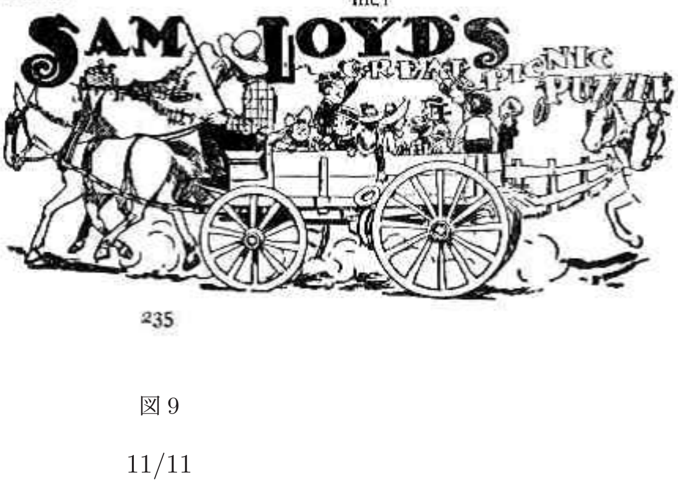
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

The Picnic Puzzle.

When they started off on the great annual picnic every wagon in town was pressed into service. Half way to the grounds ten wagons broke down, so it was necessary for each of the remaining wagons to carry one more person.

When they started for home it was discovered that fifteen more wagons were out of commission, so on the return trip there were three persons more in each wagon than when they started out in the morning.

Now who can tell how many people attended the great annual picnic?



235

図 9