不変量

問題 1 3 行 3 列の数字が

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{ccc} 7 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \end{array}$$

のように並んでいる．縦あるいは横に隣り合った 2 つの数字に同じ整数を足すことだけができるとする．左の状態から右の状態にすることが不可能であることを証明せよ．

［証明］

$$\begin{array}{ccc} \boxed{1} & 2 & \boxed{3} \\ 4 & \boxed{5} & 6 \\ \boxed{7} & 8 & \boxed{9} \end{array} \quad \to \quad \begin{array}{ccc} \boxed{7} & 8 & \boxed{9} \\ 6 & \boxed{2} & 4 \\ \boxed{3} & 5 & \boxed{1} \end{array}$$

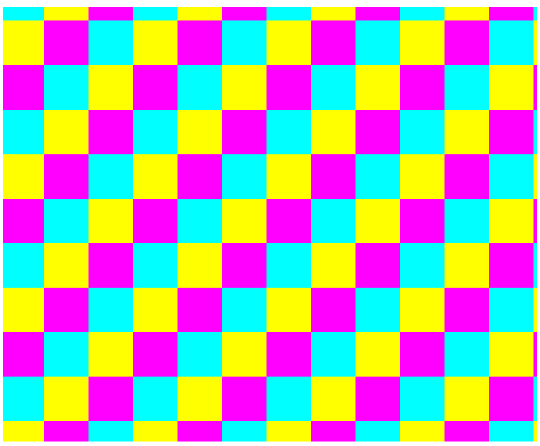
のように□で囲った部分とそうでない部分に分けると，問題の操作によって，□の部分の数の和からそれ以外の部分の和の差は不変である．その量を左について I，右を I' とすると，

$$I = (1+3+5+7+9) - (2+4+6+8) = 5$$
$$I' = (7+9+2+3+1) - (8+6+4+5) = -1$$

となり，左の状態から右の状態にはならない． ［証明おわり］

問題 2 座標平面上の格子点に 3×3 の正方形状に 9 個の石が置いてある．ペグソリティアのルールで石を減らしてゆくと，最後に 1 つの石だけを残すことはできないことを証明せよ．

［証明］格子を図のように 3 色に色分けしてみよう．



黄色の部分は

$$(r, g, b) = (1, 1, 0)$$

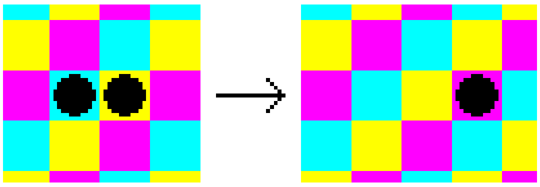
に，シアンは

$$(r, g, b) = (0, 1, 1)$$

マゼンタは

$$(r, g, b) = (1, 0, 1)$$

に対応している．



石のある場所の色の値 (r, g, b) を全て加えると，この値（といっても 3 つの値なのでベクトルというべきかも知れないが）が不変量となる．図のような場合左の方は

$$(0, 1, 1) + (1, 1, 0) = (1, 0, 1)$$

となり，移動後の右のマゼンタと一致している．ここで注意しなくてはならないのは，単なる足し算ではなく，

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0 \\ 0 + 1 &= 1 \\ 1 + 0 &= 1 \\ 1 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

であり，2 を法とする剰余と考えてもよいし，排他的論理和と言ってもよい．今は横の飛び越しを扱ったが縦方向でも同様である．また場所を選ばない．さて，3×3 の正方形状に石が並んでいる場合を考えてみよう．この状態ではどこにあっても 1 色につき 3 箇所ずつあるので，不変量は

$$3 \times \{(1, 1, 0) + (0, 1, 1) + (1, 0, 1)\} = (0, 0, 0)$$

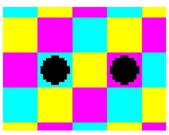
一方石が 1 つしかない場合は，その不変量は $(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)$ のうちのどれか 1 つである．つまり先ほどの $(0, 0, 0)$ と一致しないので，3×3 の石から 1 個の石までもっていくことは不可能である．

［証明おわり］

問題 3 座標平面上の格子点に 1 辺の長さが 3 の倍数である長方形状に石が置いてある．ペグソリティアのルールで石を減らしてゆくと，最後に 1 つの石だけを残すことはできないことを証明せよ．

前問から最初の状態は不変量が $(0, 0, 0)$ である．したがって不変量が $(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)$ のうちのどれか 1 つである最終状態にはもっていくことができない．

［証明おわり］



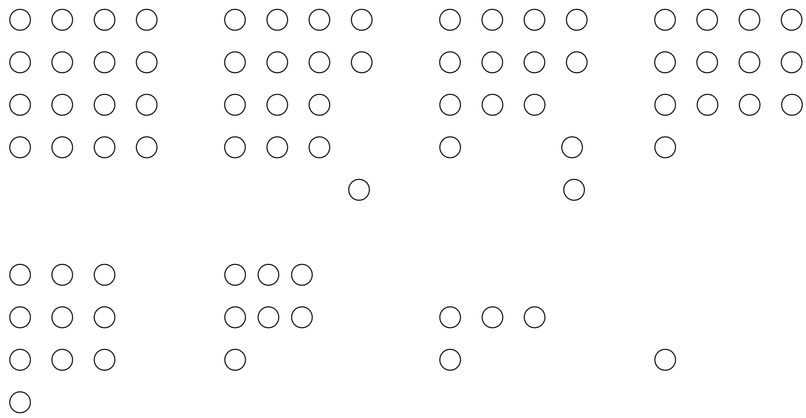
変形可能ならば不変量は変わらないが，その逆は必ずしも成り立たない．つまり不変量が同じだからと言って変形可能とはいえないわけである．たとえば図のように不変量が

$$(0,1,1)+(1,0,1)=(1,1,0)$$

であってもこの形は石 1 つにもっていくことはできない．

問題 4 座標平面上の格子点に $n \times n$ の正方形状に石が置いてある．n が 3 の倍数でなければ，最後に 1 つの石だけを残すことができることを証明せよ．

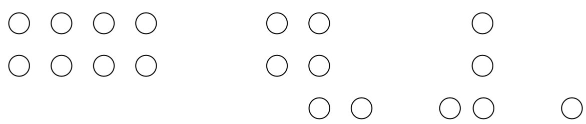
［証明おわり］$n=1$ あるいは $n=2$ のときは自明である．$n=4$ のときを調べてみよう．



$n=5$ のときも同様に 2×2 の大きさにすることができる．$n>3$ のときは 3 行あるいは 3 列ずつ削ってゆけばいずれ上記の場合に帰着できる．［証明おわり］

問題 5 座標平面上の格子点に $m \times n$ の長方形状に石が置いてある．m, n がともに 3 より大きく，なおかつ 3 の倍数でなければ，最後に 1 つの石だけを残すことができることを証明せよ．

［証明］2×4 の場合について調べてみよう．



つまり $n \equiv 2, m \equiv 1 \pmod 3$ の場合あるいはその逆の場合は全てこの形に帰着できる．正方形の場合は前問で証明が終わっている．よって題意は証明された．［証明おわり］

参考文献

[1] 北海道大学数学科『数学の並木道』（日本評論社，2004 年）