

## 二分木構造に関する問題

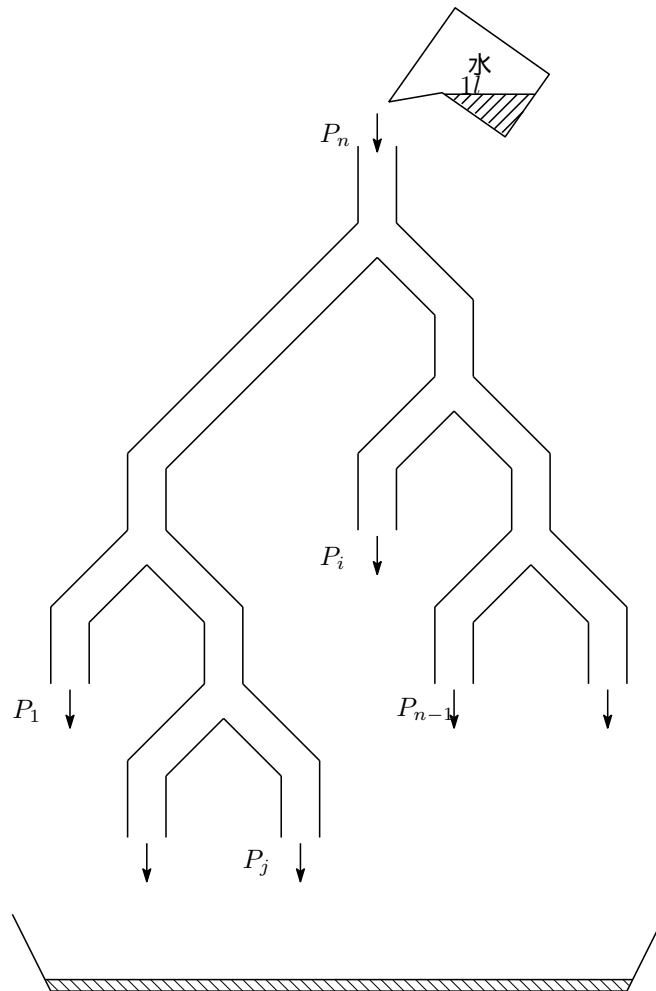
問題 1  $n$  を 2 以上の自然数とする． $n$  地点  $P_1, P_2, \dots, P_n$  を結ぶ道路網があり，次の条件を満たしている．

- ・各  $P_i$  からは 1 本だけ道が出ている
- ・4 本以上の道が集まる点はない
- ・任意の  $i, j (1 \leq i < j \leq n)$  について， $P_i$  から  $P_j$  へ行く経路はちょうど 1 通り

$P_i$  から  $P_j$  へ行く経路において途中を通る分岐点の個数を  $a(i, j)$  とする．このとき，

[1]  $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^{a(i,n)}}$  は道路網の形状によらないことを示し，その値を求めよ．

[2]  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a(i, j)}{2^{a(i, j)}}$  は道路網の形状によらないことを示し，その値を求めよ．



[解] [1] 道路網を図のようなパイプ構造に変え， $P_n$  より 1 リットルの水を注ぐ．各分岐点では正確に半分に水は分かれる．各  $P_i (1 \leq i < n)$  より出てくる水は

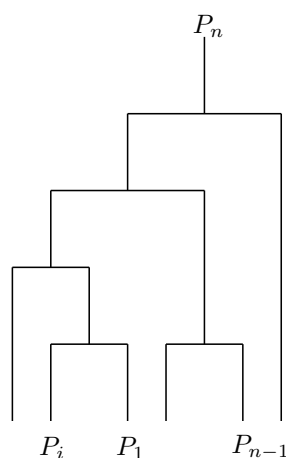
$$\frac{1}{2^{a(i,n)}} \quad [l]$$

であり，その総和は注がれた水の量と等しいので，やはり 1 リットルである．

$$\therefore \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^{a(i,n)}} = 1 \cdots Ans.$$

また，これはパイプ網の形状によらない．

[ [1] の別解 ]  $P_i (1 \leq i < n)$  はお互いにトーナメント戦を行い，最後に勝ち残った者がボス  $P_n$  と戦うことにする． $P_i$  は全て最初に体力 1 を持っている．一度戦うことにより体力を半分に減らす．しかし勝者は敗者の体力を全て奪うこととする．最後に勝ち残った勝者は体力をどれだけもっているか．という問題に帰着できる．勝者は戦いが終わったあとは常に体力 1 を持っているので，最後もやはり 1 である．これはトーナメントの形状によらない．



以上は  $P_n$  から他の点に至る経路で考えたが，任意の点から他の点へ至る経路で考えても同じである．つまり，

$$\therefore \sum_{i \neq j} \frac{1}{2^{a(i,j)}} = 1$$

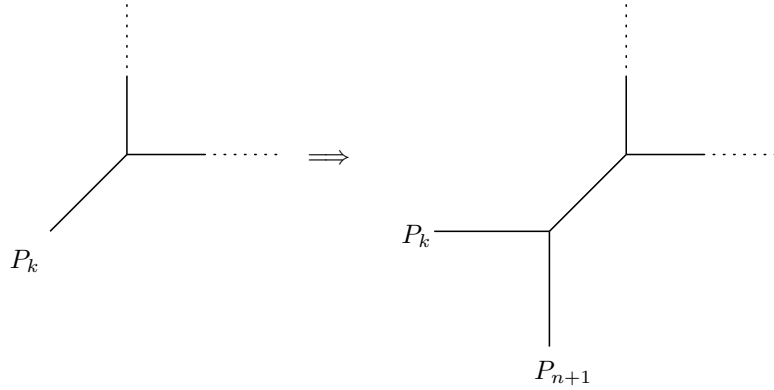
[2] 今すでにある  $n$  地点の道路網について

$$S(n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a(i,j)}{2^{a(i,j)}}$$

とする．図のように，この道路網の任意の点  $P_k$  を分岐点に変え，その分岐点から 2 本の道路を作り，その先に  $P_k$  と新しい点  $P_{n+1}$  を置く．そして，新たにできた道路網について

$$S(n+1) = \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} \frac{a'(i,j)}{2^{a'(i,j)}}$$

とする．増設前の道路網を旧道路網，増設後のそれを新道路網と呼ぶことにする．旧道路網の  $a(i,j)$  と，新道路網の  $a'(i,j)$  は同じ意味である．その中には値が同じものも多いが，混乱を避けるためにあえて別の記号を用いた．



旧道路網の  $P_k$  から各点に至る経路について ,

$$A_n(k) = \sum_{i \neq k} \frac{a(i, k)}{2^{a(i, k)}} \quad (1)$$

とする . 新道路網において

$$A_{n+1}(k) = \sum_{i \neq k} \frac{a(i, k) + 1}{2^{a(i, k) + 1}} + \frac{1}{2} \quad (2)$$

上式の  $\sum$  の部分は通る分岐点がひとつ増えたことにより ,  $\frac{1}{2}$  は  $P_k$  と  $P_{n+1}$  を結ぶ経路についての部分である .  $P_{n+1}$  から他の点に至る経路についても同様であり ,

$$A_{n+1}(n+1) = A_{n+1}(k)$$

$$\therefore S(n+1) = S(n) + 2A_{n+1}(k) - A_n(k) - \frac{1}{2}$$

上式の最後の  $-\frac{1}{2}$  の部分は  $P_k$  と  $P_{n+1}$  を結ぶ経路について重複して加算しているなのでその部分を引いたものである . (1),(2) より ,

$$\begin{aligned} S(n+1) &= S(n) + 2 \left( \sum_{i \neq k} \frac{a(i, k) + 1}{2^{a(i, k) + 1}} + \frac{1}{2} \right) - \sum_{i \neq k} \frac{a(i, k)}{2^{a(i, k)}} - \frac{1}{2} \\ &= S(n) + \sum_{i \neq k} \frac{a(i, k) + 1}{2^{a(i, k)}} - \sum_{i \neq k} \frac{a(i, k)}{2^{a(i, k)}} + \frac{1}{2} \\ &= S(n) + \sum_{i \neq k} \frac{1}{2^{a(i, k)}} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

[1] の結果を用いて

$$S(n+1) = S(n) + \frac{3}{2}$$

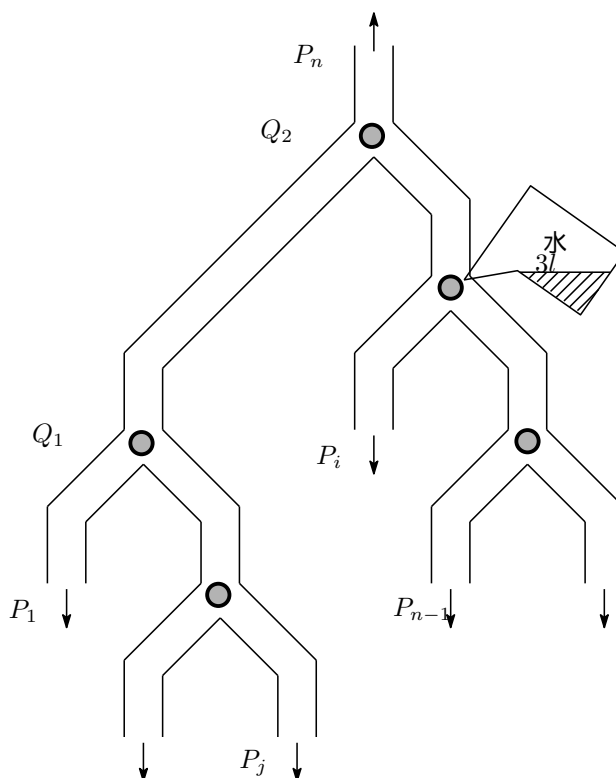
この結果は  $P_k$  の選び方によらない .  $S(2) = 0$  であるので , 道路網の形状によらず ,

$$S(n) = \frac{3}{2}n - 3 \cdots Ans.$$

[ [2] の別解 ] ちょっと解りにくい解になってしまいました . 読み飛ばしてください .

各分岐点を  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_{n-2}$  とする . また  $Q_i$  から  $P_j$  へ行く経路において途中で通る分岐点の個数を  $b(i, j)$  とする .

図のようなパイプ網を考え、水平に置く（図は [1] に用いたものを流用したため垂直に見えるが、実際は水平）．分岐点に穴をあけ、各分岐点からそれぞれ 3 リットルの水を注ぐ、最初は 3 方向に等しく 1 リットルずつ流れ、逆流することなく、分岐点では半分に分かれる．



一度に全ての分岐点に水を注ぐと混乱するので、まず一つ分岐点  $Q_k$  より水を流してみよう． $P_i$  から流れ出る水の量は

$$\frac{1}{2^{b(k,i)}}$$

である．これを、問題 1[1] の結果を用いて次のように変形する．

$$\frac{1}{2^{b(k,i)}} \times 1 = \frac{1}{2^{b(k,i)}} \times \sum_{j \in A_{i,k}} \frac{1}{2^{b(k,j)+1}}$$

ここで  $\sum$  の下に書いてある  $A$  は

$$A_{i,k} = \{x | P_x \text{ は } P_i \text{ から } Q_k \text{ を通っていける点}\}$$

である．ここで右辺を変形すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{b(k,i)}} \times \sum_{j \in A_{i,k}} \frac{1}{2^{b(k,j)+1}} &= \sum_{j \in A_{i,k}} \frac{1}{2^{b(k,i)}} \cdot \frac{1}{2^{b(k,j)+1}} \\ &= \sum_{j \in A_{i,k}} \frac{1}{2^{a(i,j)}} \end{aligned}$$

全ての分岐点に水を注ぐと、その総和は

$$\sum_{i \neq j} \frac{a(i,j)}{2^{a(i,j)}} = 3(n-2)$$

右辺は単に分岐点の個数に 3 をかけたものである．左辺は  $i, j$  の大小関係にかかわらず全て足しているの、題意のように  $i < j$  に限定すると、その総量はちょうど半分になり（この部分の説明、うまく表現できない）、

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a(i, j)}{2^{a(i, j)}} = \frac{3}{2}(n-2) \cdots \text{Ans.}$$

さて、問題を解きながら考えたことを追記するが、上述の [ 解 ] や [ 別解 ] とは必ずしも直接関係はない．

定理 1 問題 1 の様な道路網において、分岐点の個数は  $n - 2$  個である．

[ 証明略 ] ほぼ自明

このことは、問題 1 の [2] の解が分岐点の個数の  $\frac{3}{2}$  倍であることを示している．

定理 2 分岐点同士、あるいは分岐点と地点を結ぶ道路の最小単位を枝と呼ぶことにすると、枝の本数は  $2n - 3$  本である．

[ 証明略 ] これもほぼ自明

定理 3  $a(i, j)$  の最小値は 1 である．

[ 証明 ] 有限の  $n$  個の地点を結ぶ道路網について、 $a(i, j) = 1$  となるような  $(i, j)$  が一組も無いと仮定する．適当な分岐点を選んで  $Q_1$  とする．仮定から  $Q_1$  から出る枝の先の点のうち少なくとも 2 個は分岐点である．そうでなければ仮定に反する．それらの分岐点のうちひとつを  $Q_2$  とする． $Q_2$  から出る 3 本の枝の先の点のうち 1 個は  $Q_1$  であり、あと二つの点のうち少なくとも一つは分岐点である．その分岐点を  $Q_3$  とすると、 $Q_3$  についても同様のことが言え、これは無限に続く．これは有限の道路網と仮定したことに反する．よって、 $a(i, j) = 1$  となるような  $(i, j)$  が少なくとも 1 組は存在する． [ 証明おわり ]

定理 4  $a(i, j)$  の最大値の最大値は  $n - 2$  である．

[ 証明略 ] ほぼ自明

予想 1  $a(i, j)$  の最大値の最小値は

$$\left\lceil \log_2 \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lceil \log_2 \frac{n}{3} \right\rceil$$

である．ただし、 $\lceil \cdot \rceil$  は切り上げを表す．正確に言えば  $\lceil x \rceil$  は  $x$  以上の整数の中で最小のもの．

これはきちんと証明したわけではないが、 $n \geq 2$  で成り立つと思われる．

さて、問題 1 はいわゆる 2 分木構造であるが、 $m$  分木構造でも同様の問題が作れる．例えば

問題 2  $n$  を 4 以上の偶数とする． $n$  地点  $P_1, P_2, \dots, P_n$  を結ぶ道路網があり、次の条件を満たしている．

- ・各  $P_i$  からは 1 本だけ道が出ている
  - ・分岐点は全て 4 叉路である．（ひとつの道から 3 つに分岐する）
  - ・任意の  $i, j (1 \leq i < j \leq n)$  について、 $P_i$  から  $P_j$  へ行く経路はちょうど 1 通り
- $P_i$  から  $P_j$  へ行く経路において途中で通る分岐点の個数を  $a(i, j)$  とする．このとき、

$$[1] \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{3^{a(i, n)}} \text{ は道路網の形状によらないことを示し、その値を求めよ．}$$

[2]  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a(i, j)}{3^{a(i, j)}}$  は道路網の形状によらないことを示し, その値を求めよ.

[解] [1] 問題 1 と同様に答は 1 .

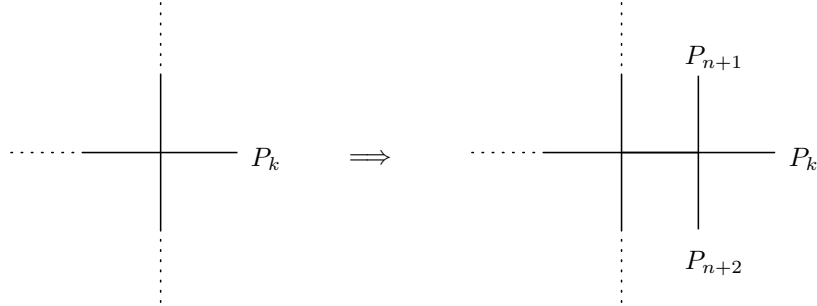
[2] 図のように道路を増設し, 旧道路網について

$$S(n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a(i, j)}{3^{a(i, j)}}$$

新道路網について

$$S(n+2) = \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} \frac{a(i, j)}{3^{a(i, j)}}$$

とする .



$$A_n(k) = \sum_{i \neq k} \frac{a(i, k)}{3^{a(i, k)}} \quad (3)$$

とする .

$$A_{n+2}(k) = \sum_{i \neq k} \frac{a(i, k) + 1}{3^{a(i, k) + 1}} + \frac{2}{3} \quad (4)$$

$\frac{2}{3}$  は  $P_k$  と  $P_{n+1}, P_{n+2}$  を結ぶ経路についての部分である .  $P_{n+1}, P_{n+2}$  から他の点に至る経路についても同様であり ,

$$A_{n+2}(n+1) = A_{n+2}(n+2) = A_{n+2}(k) \\ \therefore S(n+2) = S(n) + 3A_{n+2}(k) - A_n(k) - 1$$

上式の最後の  $-1$  の部分は  $P_k, P_{n+1}, P_{n+2}$  同士を結ぶ経路について重複して加算している部分を引いたものである . (3),(4) より ,

$$S(n+2) = S(n) + 3 \left( \sum_{i \neq k} \frac{a(i, k) + 1}{3^{a(i, k) + 1}} + \frac{2}{3} \right) - \sum_{i \neq k} \frac{a(i, k)}{3^{a(i, k)}} - 1 \\ = S(n) + \sum_{i \neq k} \frac{1}{3^{a(i, k)}} + 1$$

[1] の結果を用いて

$$S(n+2) = S(n) + 2$$

この結果は  $P_k$  の選び方によらない． $S(4) = 2$  であるので，道路網の形状によらず，

$$S(n) = n - 2$$

あるいは

$$S(2k) = 2k - 2 \quad (k \geq 1) \cdots Ans.$$

それでは  $m$  分木の場合に拡張してみよう．

$$n \geq m + 1, n \equiv 2 \pmod{m - 1}$$

である  $n$  について，

$$\begin{aligned} S(n + m - 1) &= S(n) + m \left( \sum_{i \neq k} \frac{a(i, k) + 1}{m^{a(i, k) + 1}} + \frac{m - 1}{m} \right) - \sum_{i \neq k} \frac{a(i, k)}{m^{a(i, k)}} - \frac{m - 1}{2} \\ &= S(n) + \sum_{i \neq k} \frac{1}{m^{a(i, k)}} + \frac{m - 1}{2} \\ &= S(n) + \frac{m + 1}{2} \end{aligned}$$

最も小さい道路網を考えれば，

$$S(m + 1) = \frac{m + 1}{m} C_2 = \frac{m + 1}{2}$$

であるので，

$$S(n) = \frac{(m + 1)n}{2(m - 1)} - \frac{m + 1}{m - 1} = \frac{m + 1}{m - 1} \left( \frac{n}{2} - 1 \right)$$

あるいはとなる．これを見ると，

$$n \geq 2, n \equiv 2 \pmod{m - 1}$$

とし，どの場合でも  $S(2) = 0$  を入れてやる方が自然であるようだ．また，限定された  $k$  しか代入できないように，

$$S((m - 1)k + 2) = \frac{(m + 1)k}{2} \quad (k \geq 0)$$

と書くこともできるだろう．この  $k$  は何を表しているかということ，分岐点の個数である．つまり  $S(n)$  は分岐点の個数に  $\frac{m + 1}{2}$  をかけたものに等しい．つまり分岐点から出る枝の数と分岐点の個数をかけて 2 で割ればいいのである．このことが問題 1 の [2] の別解のベースとなっている．つまり白状すれば，問題 1 の [2] の別解はいわば後付けである．

予想 2  $m$  分木構造の道路網において， $a(i, j)$  の最大値の最小値は

$$\left\lceil \log_m \frac{n}{m} \right\rceil + \left\lceil \log_m \frac{n}{m + 1} \right\rceil$$

である．

これも，あくまで予想である．