凸 n 角形（の辺および対角線）を m 角形（の辺あるいは対角線）で取りつくすという問題

定理 1 凸 n 角形の頂点を結んでできる線分，つまり辺または対角線は ${}_n\mathrm{C}_2 = \dfrac{1}{2}n(n-1)$ 本である．

［証明略］

定理 2 凸 n 角形の頂点を結んでできる凸 m 角形は ${}_n\mathrm{C}_m$ 個である．

［証明略］
例えば正 n 角形などの場合，合同な凸 m 角形が複数できることがあるが，これらはもちろん区別して数える．

定理 3 凸 n 角形の頂点を結んでできる三角形のうち，互いに辺を共有しないものの個数は $\dfrac{1}{6}n(n-1)$ 個以下である．

［証明］定理 1 より三角形の辺となりうる線分は $\dfrac{1}{2}n(n-1)$ 本なので，これらを全て使ったとして，三角形の個数は $\dfrac{1}{2}n(n-1)\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}n(n-1)$ であることは当然であるが，$\dfrac{1}{2}n(n-1)$ が 3 で割り切れない場合などはこれより少なくなる．また実際に $\dfrac{1}{6}n(n-1)$ 個の三角形が作れるかどうかは，$n=3,7$ などで明らかである（後述）． ［証明おわり］

定理 4 凸 n 角形の頂点を結んでできる三角形のうち，互いに辺を共有しないものの個数が $\dfrac{1}{6}n(n-1)$ 個であるための <u>必要条件</u> は

$$n \equiv 3, 1 \pmod 6$$

である．

［証明］前述のように $\dfrac{1}{2}n(n-1)$ が 3 で割り切れることは必要条件である．つまり

$$n \equiv 0 \quad \text{or} \quad 1 \pmod 3$$

また n が偶数であると，一つの頂点から出る対角線あるいは辺の数は $(n-1)$ 本で奇数となる．このとき多角形の一つの頂点を頂点とする三角形をできるだけ多く作ると，1 本の対角線または辺が余り，全ての対角線（辺）を用いることができなくなる．よって n は奇数でなければならない．これらのことから，

$$n \equiv 3, 1 \pmod 6$$

［証明おわり］

問題 1 $n=3,7,9$ のとき，凸 n 角形の頂点を結んでできる三角形のうち，互いに辺を共有しないものをできるだけたくさん作れ．

［解］$n=3$ のときは自明である．各頂点に自然数の番号を振ることにする．$n=7$ のときは辞書順にならべることを考えてみよう．

$$(1,2,3),(1,4,5),(1,6,7),\underline{(2,4,7)},(2,5,6),(3,4,6),(3,5,7)$$

と一応できるが，実はアンダーラインのところで辞書順をとばしている．$n=9$ のときもこのような方針ででできないことはない．

$$(1,2,3),(1,4,5),(1,6,7),(1,8,9)/(2,4,6),\underline{(2,5,9),(2,7,8)/(3,4,8),(3,5,7)},(3,6,9)/(4,7,9)/(5,6,8)$$

できないことはないが，人力ではこのあたりが限界である．（図 1）

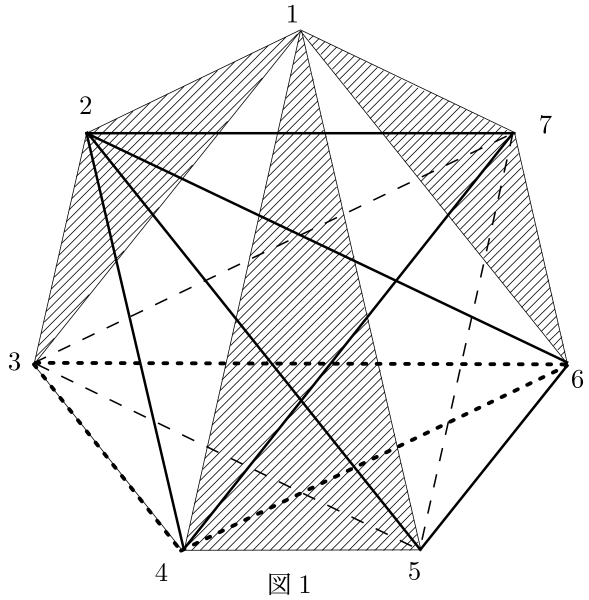

図 1

そこで，考え方を変えて，図 2 のような三角形を一つ考え，それを一つずつずらすことを考える．そうすると，次のような解が自動的に得られる．

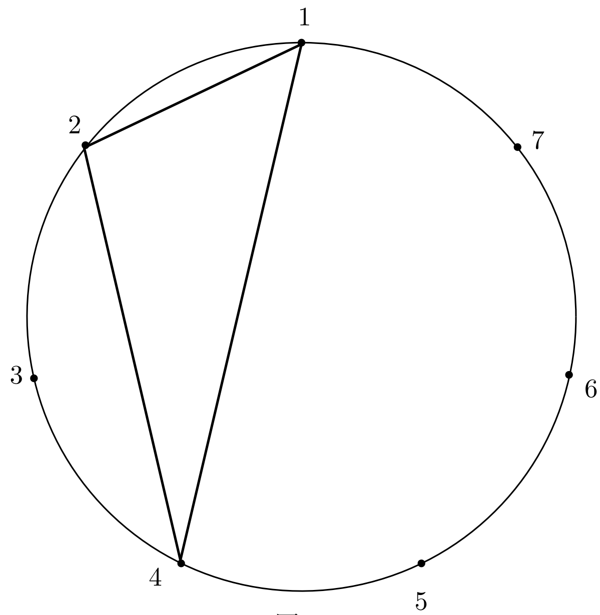

図 2

$$(1,2,4),(2,3,5),(3,4,6),(4,5,7),(5,6,1),(6,7,2),(7,1,3)$$

正 9 角形のときは図 3 のように考えるとよい．1 番の点は正 8 角形の中心に置き，その他の点を図のように結ぶ．

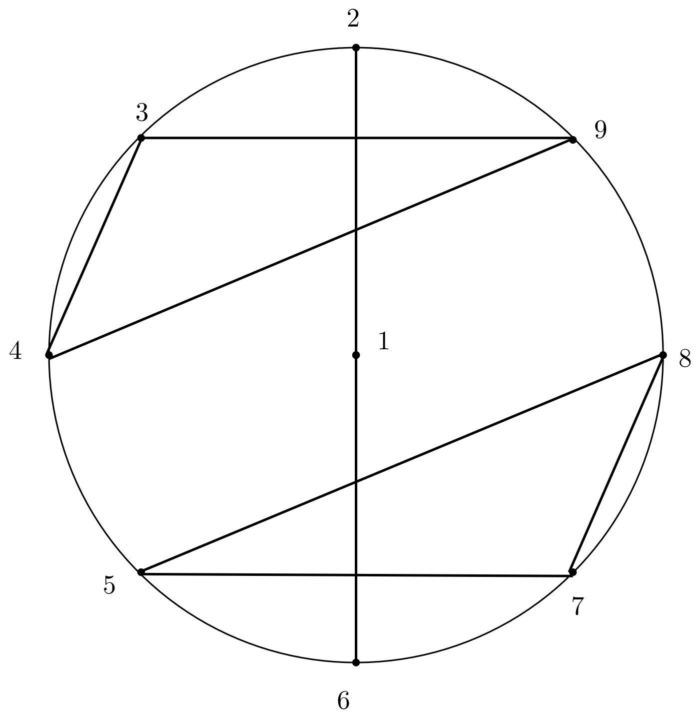

図 3

これをやはり回転させて一つずつずらすのであるが，今度は 1 回転するのではなくて，半回転でやめる．そうすると次の解を得る．

$$(1,2,6),(1,3,7),(1,4,8),(1,5,9)/(3,4,9),(4,5,2),(5,6,3),(6,7,4)/(5,7,8),(6,8,9),(7,9,2),(8,2,3)$$

$n=7$ で用いた方法を使うと，$n=13,19,25$ のときも解を得られる．$n=13$ のときは

$$(1,2,5),(1,3,8)$$

を一つずつずらしてゆけばよい．$n=19$ では

$$(1,2,5),(1,3,10),(1,6,12)$$

$n=25$ では

$$(1,2,4),(1,5,12),(1,6,14),(1,7,16)$$

$n=31$ では

$$(1,2,4),(1,5,13),(1,6,15),(1,7,17),(1,8,19)$$

を順次ずらせばよい．$n=15$ のときは $n=9$ のときの方法をとればよさそうに見えるが，残念ながらこの方法で解は得られない．$n=15$ のときは辞書式の方がよい．いささか反則ではあるがコンピュータを用いると，

$$(1,2,3),(1,4,5),(1,6,7),(1,8,9),(1,10,11),(1,12,13),(1,14,15),$$

$$(2,4,6),(2,5,7),(2,8,10),(2,9,11),(2,12,14),(2,13,15),$$

$$(3,4,7),(3,5,6),(3,8,11),(3,9,10),(3,12,15),(3,13,14),$$

$$(4,8,12),(4,9,13),(4,10,14),(4,11,15),$$

$$(5,8,13),(5,9,12),(5,10,15),(5,11,14),$$

$$(6,8,14),(6,9,15),(6,10,12),(6,11,13),$$

$$(7,8,15),(7,9,14),(7,10,13),(7,11,12)$$

という 35 組の解を得る．定理 4 の条件が 十分条件 であるかどうかは，証明できなかった．

定義 1 凸 n 角形の頂点を結んでできる三角形のうち，互いに辺を共有しないものの個数が最大で $\frac{1}{6}n(n-1)$ 個であるとき，この多角形は三角形で**取りつくせる**と言うことにする．

定理 5 凸 n 角形が三角形で取りつくせるとき，凸 $3n$ 角形は三角形で取りつくせる．

［証明］三角形で取りつくせる凸 n 角形を 3 個用意しよう．それぞれの n 角形はすでに三角形で取りつくした状態とする．つまり，それぞれの n 角形の中に辺を共有しない三角形がすでに

$$\frac{1}{6}n(n-1)\times 3=\frac{1}{2}n(n-1)\ (\text{個})$$

あるものとする．この n 角形の各頂点同士を結ぶと新たに $3n^2$ 本の対角線（辺）ができる．この対角線を全部用いてお互いに辺を共有しない三角形を作れば $3n$ 角形全体で

$$\frac{1}{2}n(n-1)+n^2=\frac{1}{6}\cdot 3n(3n-1)\ \text{個}$$

の三角形が作れるので，この定理は証明できたことになる．あらかじめ用意した 3 つの n 角形の各頂点を

$$A(0),A(1),A(2),\cdots,A(n-1)$$

$$B(0),B(1),B(2),\cdots,B(n-1)$$

$$C(0),C(1),C(2),\cdots,C(n-1)$$

とする．今，

$$A(a),B(b),C(c)$$

を結んで新たに三角形をつくることにする．ただし，

$$c\equiv a+b \pmod{n, 0\le c<n}$$

とする. つまり c は $a+b$ を n で割った剰余である．このように作った三角形について a が同一で b が異なれば c も異なる．なぜならば，もし $b_j\neq b_k$ かつ $c_j\equiv c_k$ とすれば．$a+b_j\equiv a+b_k$ より $b_j\equiv b_k$ となり矛盾するからである．同様に b が同一で a が異なれば c も異なる．つまりこのような作り方をした三角形同士は辺を共有することはない．また一つの $A(a)$ について n 個の三角形が作れ,A 全体では n^2 個の三角形が作れることがわかった．［証明おわり］

定理 5 より三角形により取りつくすことのできる n 角形は 無限に存在する ことが言える．

問題 2 定理 5 の方法を用いて凸 21 角形を三角形で取りつくせ．

［解］最初に用意した 7 角形はすでにそれぞれ 7 個の三角形で取りつくされたものとする．7 角形それぞれの頂点を

$$A(0), A(1), A(2), \cdots, A(6)$$

$$B(0), B(1), B(2), \cdots, B(6)$$

$$C(0), C(1), C(2), \cdots, C(6)$$

とする．

$$A(a), B(b), C(c)$$

とした場合，a, b, c を並べると，

$$(0,0,0), (0,1,1), (0,2,2), \cdots, (0,6,6)$$

$$(1,0,1), (1,1,2), (1,2,3), \cdots, (1,6,0)$$

$$(2,0,2), (2,1,3), (2,2,4), \cdots, (2,6,1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(6,0,6), (6,1,0), (6,2,1), \cdots, (6,6,5)$$

と 49 個の新たな三角形ができ，どれも辺を共有しない．よって合計で 70 個の三角形をつくることができた．

少し拡張してみよう．

定理 6 凸 n 角形の頂点を結んでできる m 角形のうち，互いに辺や対角線を共有しないものの個数は $\dfrac{n(n-1)}{m(m-1)}$ 個以下である．

［証明］定理 1 より明らか．

問題 3 凸 16 角形の頂点を結んでできる四角形のうち，互いに辺や対角線を共有しないものをできるだけたくさん作れ．

［解］図 4 のように各点を 3 分の 1 回転，正確には頂点 5 個分ずらしてゆくと 20 組の解を得られる．

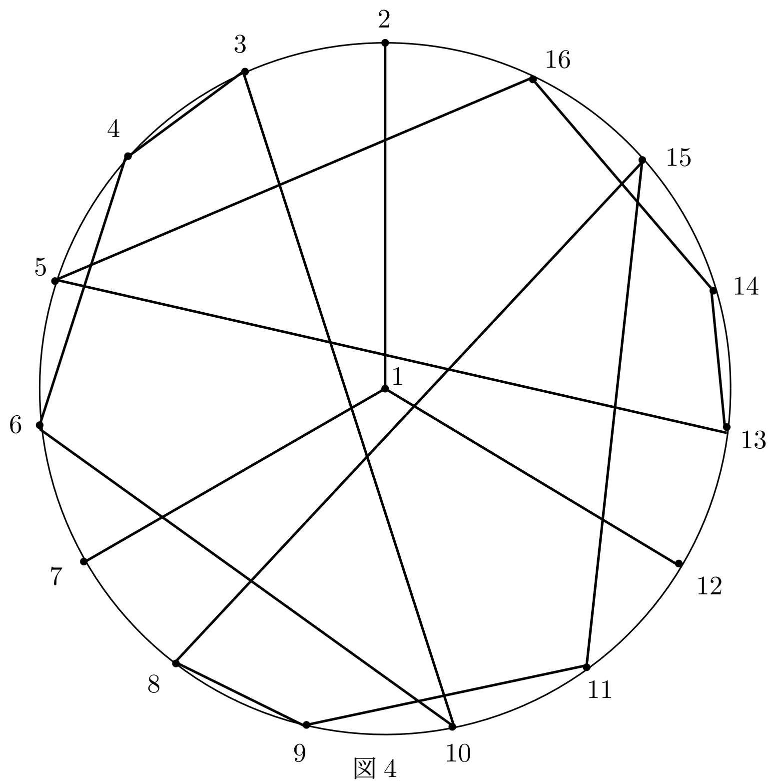

図 4

問題 4 凸 25 角形の頂点を結んでできる五角形のうち，互いに辺や対角線を共有しないものをできるだけたくさん作れ.

［解］図 5 のように各点を 4 分の 1 回転，正確には頂点 6 個分ずらしてゆくと 30 組の解を得られる.

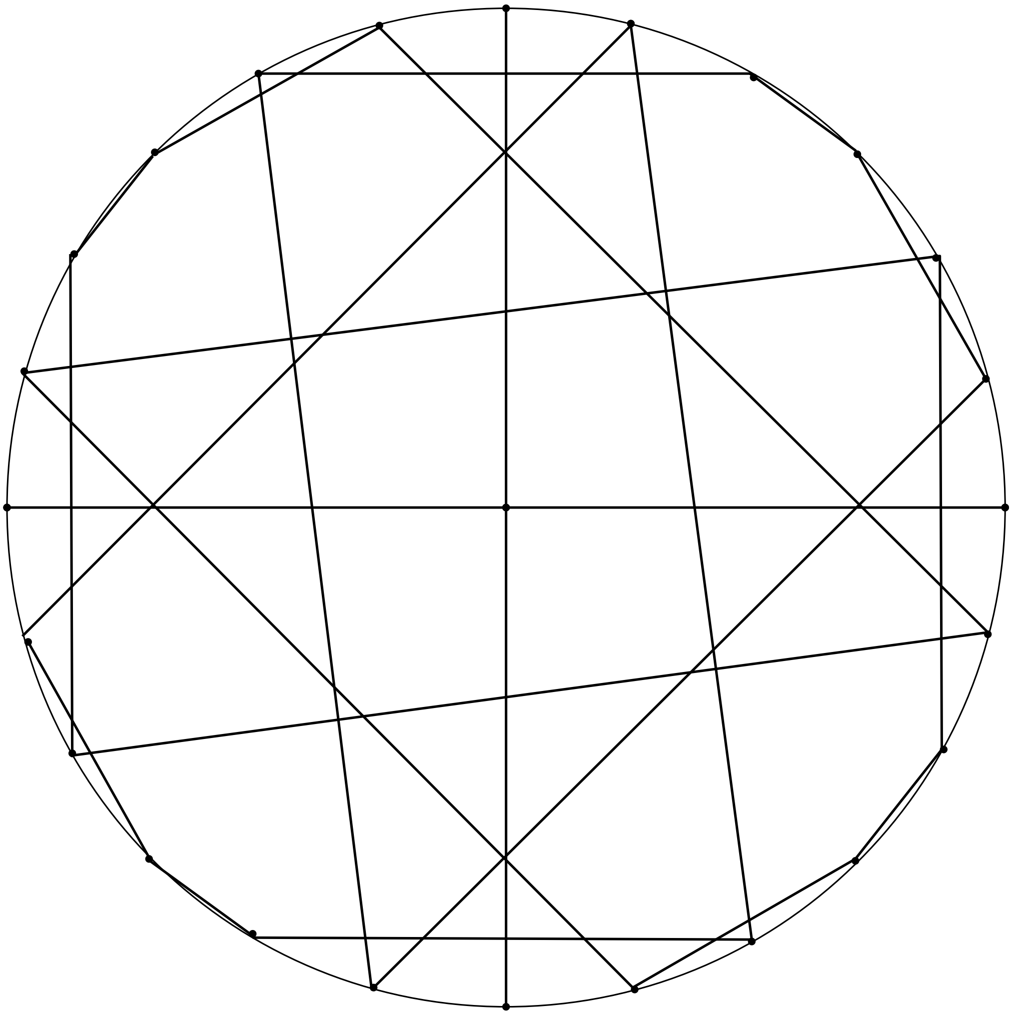

図 5

しかしながら 36 角形を 6 角形で取りつくすことはできなかった．他の場合を調べると，49 角形を 7 角形で取りつくすことはできる．その方法は図 3 で用いた方法の延長で中心に 1 点をおき，48 角形で考える．7 角形の辺の長さは，

$$(4, 6, 1, 2, 12, 5, 18)$$

である．辺の長さというのは，正 48 角形の中心から測った中心角の比に相当する．また四角形で取りつくせる多角形で四角形の次に少ない角数の多角形は 13 角形である．その辺の長さは，

$$(4, 1, 2, 6)$$

である．これは正 13 角形の中心から測った中心角に相当する．つまり図 2 の方法に相当する．五角形は五角形の次に 21 角形で取りつくしが可能である．辺の長さは

$$(3, 1, 5, 2, 10)$$

である．6 角形は 31 角形を取りつくすことができる．辺の長さは

$$(1, 2, 5, 4, 6, 13)$$

6 角形で 21 角形を取りつくすことはできない．ただしこれまで示した方法によってであり，全ての場合を調べたわけではない．前述のように 36 角形の場合も同様である．43 角形を 7 角形で取りつくすことはできそうであるが，解は見つからない（というか途中であきらめた）．

定理 7 凸 n 角形が m 角形で取りつくせ，なおかつ n が 1 以外に絶対値が m 未満の約数をもたない，つまり n の全ての素因数が m 以上であるとき，凸 mn 角形は m 角形で取りつくせる．

［証明］m 角形で取りつくせる凸 n 角形を m 個用意しよう．それぞれの n 角形はすでに m 角形で取りつくした状態とする．つまり，それぞれの n 角形の中に辺を共有しない m 角形がすでに

$$\frac{n(n-1)}{m(m-1)} \times m = \frac{n(n-1)}{m-1}\text{(個)}$$

あるものとする．この n 角形の各頂点同士を結ぶと新たに

$${}_m\mathrm{C}_2 n^2\text{本}$$

の対角線（辺）ができる．一つの m 角形に辺（対角線）は ${}_m\mathrm{C}_2$本 あるので，新たにできた辺（対角線）を全部用いてお互いに辺（対角線）を共有しない m 角形を作れば mn 角形全体で

$$\frac{n(n-1)}{m-1} + n^2 = \frac{n(mn-1)}{m-1} = \frac{mn(mn-1)}{m(m-1)}\text{個}$$

の m 角形が作れるので，この定理は証明できたことになる．あらかじめ用意した m 個の n 角形の各頂点を

$$A_0(0), A_0(1), A_0(2), \cdots, A_0(n-1)$$
$$A_1(0), A_1(1), A_1(2), \cdots, A_1(n-1)$$
$$A_2(0), A_2(1), A_2(2), \cdots, A_2(n-1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_{m-1}(0), A_{m-1}(1), A_{m-1}(2), \cdots, A_{m-1}(n-1)$$

とする．今，

$$A_0(a_0), A_1(a_1), A_2(a_2) \cdots A_{m-1}(a_{m-1})$$

を結んで新たに m 角形を作ることにする．ただし，

$$a_k \equiv a_0 + kd \quad (\mathrm{mod}\ n, 0 \leq a_k < n)$$
$$(a_0 = 0, 1, 2, \cdots n, d = 0, 1, 2, \cdots n, k = 0, 1, 2, \cdots m)$$

とする. このように作った m 角形について，辺または対角線が共通であることはない．もし

$$a_k = a'_k, a_{k'} = a'_{k'} (k \neq k')$$

つまり，

$$\begin{cases} a_0 + kd \equiv a'_0 + kd' \\ a_0 + k'd \equiv a'_0 + k'd' \quad (\mathrm{mod}\ n) \end{cases}$$

とすれば，

$$(k-k')d \equiv (k-k')d' \quad (\mathrm{mod}\ n)$$

$$(k-k')(d-d') \equiv 0 \pmod{n}$$

n が 1 以外に m 未満の約数をもたないことと $k \neq k'$ であることから,

$$d-d' \equiv 0$$

つまり $d=d'$, 同一の m 角形においてのみ起こりうる. よって, このような方法で作った m 角形同士で対角線や辺を共有することはない. [証明おわり]

証明がわかりづらいものになってしまったので, 次の問題で例示してみよう.

問題 5 凸 52 角形を四角形で取りつくせ.

[解] 四角形で取りつくした 13 角形を 4 つ用意する. それぞれを A,B,C,D と名づけ, A,B,C,D の 13 個の頂点を

$$A(0),A(1),A(2),\cdots,A(12)$$

$$B(0),B(1),B(2),\cdots,B(12)$$

$$C(0),C(1),C(2),\cdots,C(12)$$

$$D(0),D(1),D(2),\cdots,D(12)$$

とする. 新たに 169 個の四角形をつくることができるが, それらは次のように点を結ぶ. 各数字は $A(a),B(b),C(c),D(d)$ の (a,b,c,d) を表す.

$$(0,0,0,0),(0,1,2,3),(0,2,4,6),\cdots,(0,12,11,10)$$

$$(1,0,12,11),(1,1,1,1),(1,2,3,4),\cdots,(1,12,10,8)$$

$$(2,0,11,9),(2,1,0,12),(2,2,2,2),\cdots,(2,12,9,6)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(12,0,1,2),(12,1,3,5),(12,2,5,8),\cdots,(12,12,12,12)$$

これらの四角形同士は辺または対角線を共有しない.

定理 7 の特殊な場合を取り出して次の定理を得る.

定理 8 p を奇素数とすると, 凸 p^n 角形は p 角形で取りつくせる.

よってこのような多角形は <u>無数に存在する</u> が, m が合成数の場合も, 1 以外に絶対値が m 未満の約数をもたないような n で n 角形を取りつくすことが可能である場合が一つでもあれば, そのような多角形は無数に存在する. はたしてそのような n が必ず存在するのかは未解決問題として残ってしまった.