フィボナッチ，トリボナッチ，・・・，n ボナッチ

問題 1 1 と 2 だけの足し算を使って 10 にする方法は何通りあるか．ただし，順序を変えて同じになるようなものも別の場合とする．例えば，

$$1+2+1+1+1+1+1+1+1=10$$
$$2+1+1+1+1+1+1+1+1=10$$

は別の場合と数える．

［解］求める場合の数を F_{10} とする．一般に 1,2 のみの足し算で n を作る方法の数を F_n で表す．10 を作る足し算は最後が +1 で終わる場合と，+2 で終わる場合のふた通りに分けることができる．つまり，

$$\cdots+1=10 \tag{1}$$

と

$$\cdots+2=10 \tag{2}$$

である．(1) の $\cdots$ は F_9 通りあり，(2) の $\cdots$ は F_8 通りあるので，

$$F_{10}=F_8+F_9$$

である．一般に

$$F_{n+2}=F_n+F_{n+1}$$
$$F_1=1, F_2=2$$

なのでこれはフィボナッチ数列となる．つまり

$$1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,\cdots$$

の第 10 項が答である．

$$F_{10}=89\,(\text{通り})\cdots(Ans.)$$

問題 2 1,2,3 の足し算を使って 10 にする方法は何通りあるか．ただし，順序を変えて同じになるようなものも別の場合とする．例えば，

$$1+2+3+1+1+1+1+1+1=10$$
$$2+1+3+1+1+1+1+1+1=10$$

は別の場合と数える．

［解］1,2,3 のみの足し算で n を作る方法の数を T_n で表す．前問と同様に考えれば，

$$T_{n+3}=T_n+T_{n+1}+T_{n+2}$$
$$T_1=1, T_2=2, T_3=4$$

このような数列はトリボナッチ数列と呼び，

$$1,2,4,7,13,24,44,81,149,274,\cdots$$

の第 10 項が答である．

$$T_{10}=274\,(\text{通り})\cdots(Ans.)$$

問題 3 任意の自然数の足し算を使って n にする方法は何通りあるか．ただし，順序を変えて同じになるようなものも別の場合とする．

求める場合の数を A_n とすると，

$$A_n = \sum_{k=1}^{n-1} A_k$$

$$\therefore A_n - A_{n-1} = A_{n-1}$$

$$\therefore A_n = 2A_{n-1}$$

$A_1 = 1$ なので，

$$A_n = 2^{n-1} \cdots (Ans.)$$

つまり等比数列である．n ボナッチ数列の最初の n 項も当然ながら，同様の等比数列となる．