六角形を菱形で充填するという問題

問題 1 図 1，右の六角形を左の菱形で充填する方法は何通りあるか．回転，鏡像は異なるものとして数える．

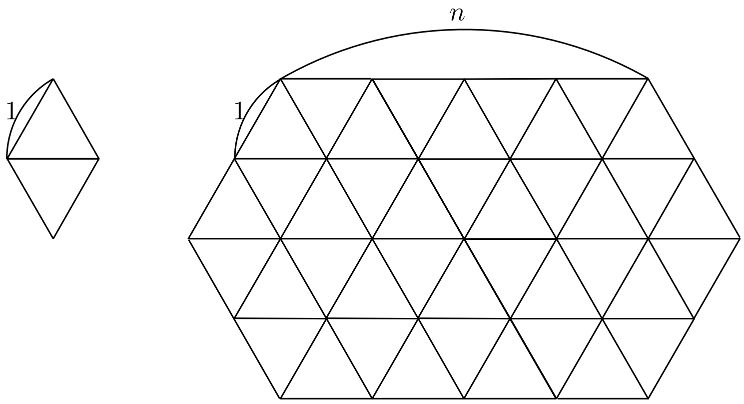
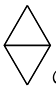
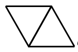
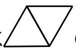


図 1

［解］のような菱形を縦型，あるいはのような菱形を横型と呼ぶことにする．図 2 の線分 AB は n 個の横型の菱形の辺で占められるので，その菱形の対辺はすべて線分 CD 上にある．つまり線分 CD を横切る縦型の菱形は 1 個である．同様に考えると，線分 EF を横切る縦型の菱形は 2 個である．またその 2 個の菱形は CD を横切る縦型の菱形の左右に 1 つずつなければならない．片方に 2 つあると，線分 CD と EF にはさまれた横型の菱形の水平な辺同士が対応しないためである．以上のことは線分 GH を横切る縦型の菱形についても言える．これらをまとめると，縦型の菱形は 4 つある．線分 EF を横切るものが 2 個，線分 CD と GH を横切るものが 1 つずつ．後者 2 個は前者 2 個の間になければならない．これら縦型の菱形の位置が決まれば他の横型の菱形は一通りに決まる．つまり，4 つの縦型の菱形の位置が何通りあるか数えればよい．

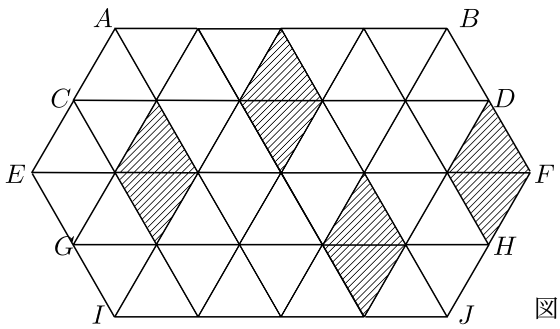


図 2

EF を横切る 2 つの菱形の距離（どれだけ平行移動したら重なるかということ）を k とすると，その 2 個の菱形の置き方は $n+2-k$ 通り．またこの 2 個の菱形に挟まれる，線分 CD と GH を横切る 2 個の菱形の置き

方は重複順列 k^2 となるので求める場合の数 a_n は

$$\begin{aligned}
a_n &= (n+1)\cdot 1^2 + (n-2)\cdot 2^2 + (n-3)\cdot 3^2 + \cdots + 1\cdot (n+1)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}(n+2-k)k^2 \\
&= \frac{1}{6}(n+2)(n+1)(n+2)(2n+3) - \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 \\
&= \frac{1}{12}(n+1)(n+2)^2(n+3)\cdots Ans.
\end{aligned}$$

[別解 1] 求める場合の数を a_n，図のように他の場合の数を決める．ただし，右端の欠けた部分はすべて横型の菱形が入る．

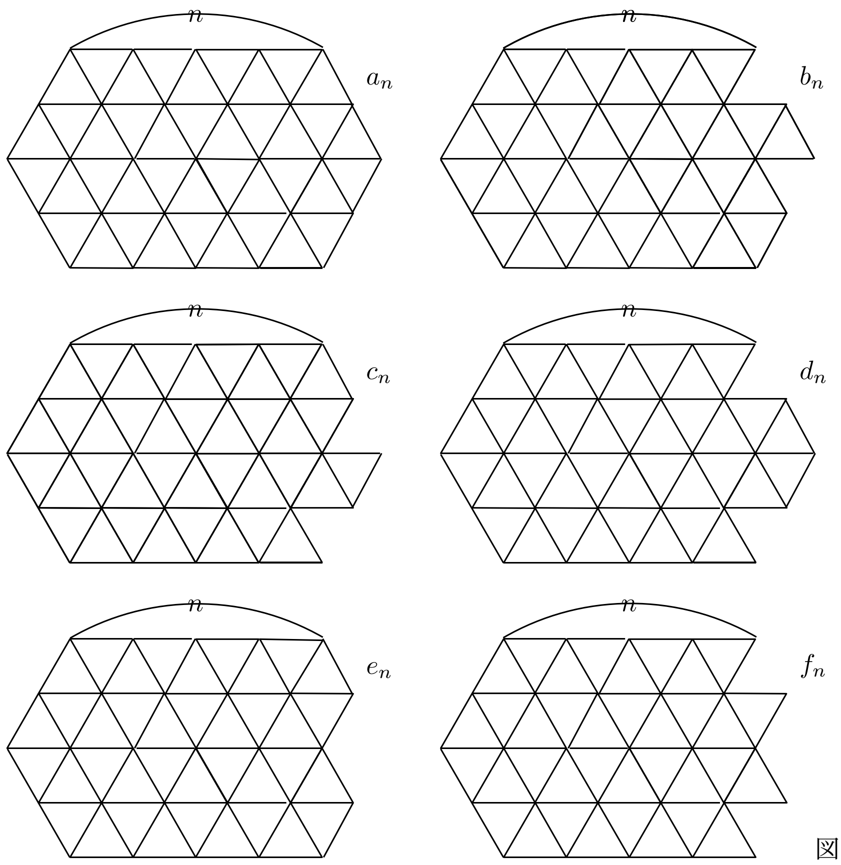


図 3

$$\begin{cases}
a_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} + d_{n-1} + e_{n-1} & (1) \\
b_n = b_{n-1} + d_{n-1} & (2) \\
c_n = c_{n-1} + d_{n-1} & (3) \\
d_n = d_{n-1} + f_{n-1} & (4) \\
e_n = b_{n-1} + c_{n-1} + d_{n-1} + e_{n-1} & (5) \\
f_n = f_{n-1} & (6)
\end{cases}$$

$$a_0 = b_0 = c_0 = e_0 = f_0 = 1, d_0 = 2$$

(6) より

$$f_n = 1$$

(4) より

$$d_n = n + 2 \tag{7}$$

(2),(3),(7) より

$$b_n = c_n = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) \tag{8}$$

(5),(7),(8) より

$$e_n = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) \tag{9}$$

(1),(5),(9) より

$$a_n = \frac{1}{12}(n+1)(n+2)^2(n+3) \cdots Ans.$$

なお，途中の計算は煩雑なので省いた．

［別解 2］図 4 のように $4 \times n$ 個の立方体を並べ，斜めから見ているとする．この立方体を手前から取っていく．その取りかたは何通りあるかということと，この問題は同一である．A 列の立方体の取りかたは［解］の EF を横切る右の縦型の菱形の位置に対応している．また D 列の立方体の取りかたは左の縦型の菱形に対応している．また，B 列，C 列の立方体の取りかたは CD, GH を横切る菱形の位置に対応している．

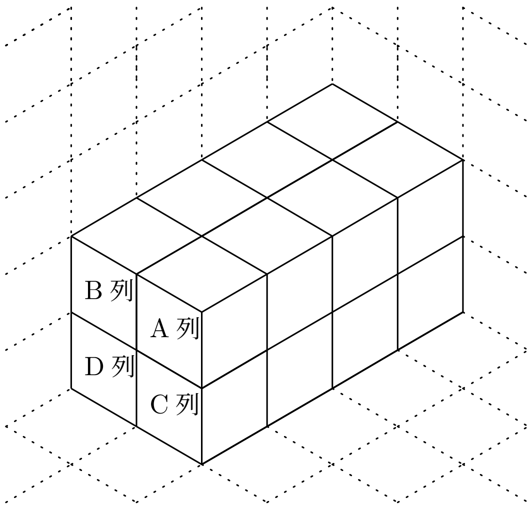


図 4

例えば図 2 の場合は図 5 のようになる．A,B,C,D の各列の立方体の個数を a, b, c, d とすると，

$$0 \leq a \leq b \leq d \leq n, and, 0 \leq a \leq c \leq d \leq n$$

となる場合の数を数えればよい．0 から n の $n+1$ 個から 4 個を取り出す重複組み合わせを考え，小さい順に a, b, c, d とする．

$${}_{n+1}\mathrm{H}_4 = \frac{1}{24}(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)$$

b, c は入れ替えることができるので

$$\frac{1}{24}(n+4)(n+3)(n+2)(n+1) \times 2 = \frac{1}{12}(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)$$

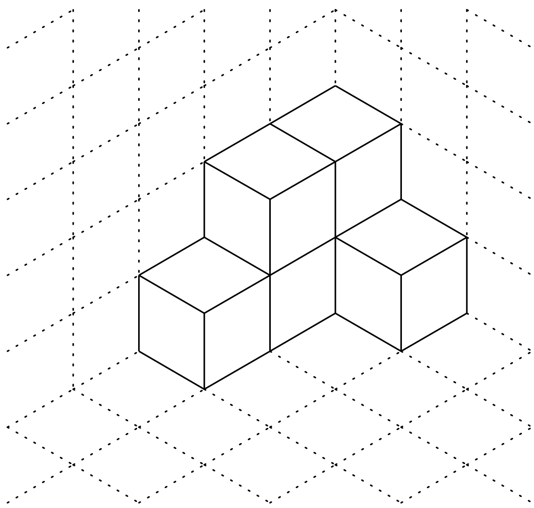


図 5

$b = c$ の場合を数えすぎているので

$$\begin{aligned}&\frac{1}{12}(n+4)(n+3)(n+2)(n+1) -_{n+1}\mathrm{H}_3\\=&\frac{1}{12}(n+4)(n+3)(n+2)(n+1) - \frac{1}{6}(n+3)(n+2)(n+1)\\=&\frac{1}{12}(n+3)(n+2)^2(n+1) \cdots Ans.\end{aligned}$$

［その後の考察］回転，鏡像を同一のものとして数えるとどうなるか考えてみよう．［別解 2］の方法で考えると，単純に ${}_{n+1}\mathrm{H}_4$ とすれば鏡像は省くことができる．180 度回転した場合に重なる場合を省くために 2 で割ると，

$$\frac{1}{48}(n+4)(n+3)(n+2)(n+1) \text{ 通り}$$

であるが，これだと，自分自身が 180 度回転した場合に重なるような対称図形を引きすぎているのでそれを復活する．n が奇数の場合は

$$\frac{1}{48}(n+4)(n+3)(n+2)(n+1) + \frac{1}{16}(n+1)(n+3) = \frac{1}{48}(n+1)(n+3)(n^2+6n+11)$$

n が偶数の場合は

$$\frac{1}{48}(n+4)(n+3)(n+2)(n+1) + \frac{1}{16}(n+2)(n+4) = \frac{1}{48}(n+2)(n+4)(n^2+4n+6) \quad (n \neq 2)$$

$n \neq 2$ としたのは $n = 2$ の場合は全体が正六角形になるので 180 度だけでなく，60 度回転した場合に重なる図形が生じるためである．$n = 2$ の場合は次に示す 6 通りである．

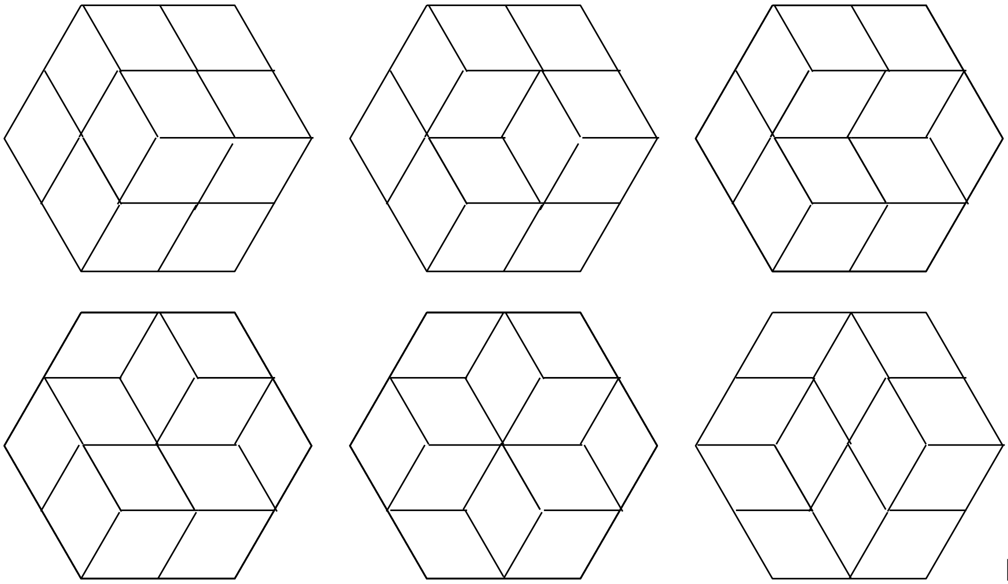


図 6