2次元石取りゲーム

このゲームは,「丸消し」とも言われ，いわゆる石取りゲームの一種である．図1のように4行4列に並べた16個の石を2人で交互に取り合い，最後に石を取った方が負けとする．取る際のルールは次の通りである．

○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○
○ ○ ○ ○

図1

一度に取れる石は1つの行あるいは列に含まれる連続した石とする．よって1度に取れる数は1個以上4個以下である．2つの行あるいは列にまたがってとってはいけない．斜めに連続した石を取ることもできない．

さて，ここで，自分が石を取ったあとで，相手がどのように取ってもこちらが最善をつくせば必ず勝つことができる形を「良形」，それ以外を「悪形」と呼ぶことにしよう．悪形は相手にとって良形の1手前なので，相手が最善をつくせば必ず負ける．

残りの石の少ない方から考えていこう．図2のように石が1個しか残っていない場合は，相手はこの石を取るしかないので当然良形である．「1」というのは良形につけた名前である．以後このように良形に名前をつけてかぎ括弧で囲って示すことにする．名前は数字またはアルファベットの組み合わせとする．

○

図2（石が1つの場合は当然良形である．「1」）

残りの石が2個しかない形は全て悪形である．相手が図2のようにすることができるからである．石が3つの場合は図3のように石が3つとも離れている場合のみ良形である（本質的に1種類なのだが，盤面上に現れるパターンとしては回転や鏡像で同じ形を除いても40通りである）．「1+1+1」という名前は「1」が3つ離れて（連続して取れない位置に）ある場合をさしている．「+」という記号を以後同様に使うことにする．×の記号は紛らわしいので使用しない．

○ 　 ○
　○

図3（石数3のときの唯一の良形,「1+1+1」）

石数が4個の場合の良形は大きく分類して3種類ある（図4）．平行移動，回転などで同一のものは全て良形である．

三つ目のパターンは連続した2個が離れて2つある，ということである．石数が5個の良形は図5に示したような，5個の石が全部離れてある場合のみである．これ以外の5個のパターンは全て悪形である．

6個の良形はたくさんあるので代表的なものだけ示してみよう（図6)．名前のアルファベットは容易に形を想像できるものもあれば，そうでないものもある．「S」はカタカナの「ス」を連想するのでつけた．

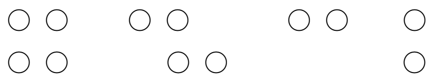

図 4（石数 4 のときの 3 種類の良形．左から順に，「4O」，「4Z」，「2+2」）

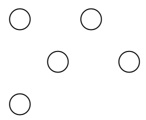

図 5（石数 5 の場合の唯一の良形．「1+1+1+1+1」）

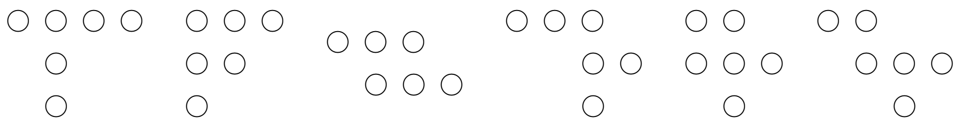

図 6（石数 6 の独立型良形．左から順に「6T」，「6A」，「6Q」，「6S」，「6R」，「6W」）

一転して 7 個は，石が 7 個全部離れた形 1 種類（「1+1+1+1+1+1+1」）しか良形がない．この様に 1 つ 1 つの石が独立して奇数個ある場合は，全て良形である．それに対して偶数個の石が独立して配置されている場合は悪形である．このことは容易に証明できる．ただし，9 個以上でこのような形は作れない．

石数 8 個の場合が最も良形の種類が多い．順列の総数も最大なので当然と言えば当然である．全部書き上げるのは困難なので割愛する．

さてここまで石数が少ない方から順に追ってきたわけであるが，今度は多いほうから順に考えてみよう．16 個全部そろった形，つまり図 1 のような形は良形なのか悪形なのか調べてみよう．コンピュータで調べてみた．プログラムのリストを示すと良いのだが，残念ながら 8 ビットコンピュータの時代のあまり一般的でない BASIC なので割愛する．結果良形だということがわかった．つまりこのゲームは後手必勝である．今度は石数の多いほうから調べてみよう．15 個の場合，つまり 1 個だけどれかを取った状態は全て悪形である．当然といえば当然である．14 個の場合は 3 通りの良形がある（図 7）．

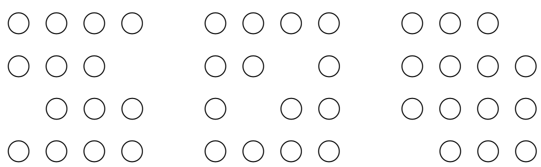

図 7

13 個の場合は 5 通りの良形がある（図 8）．

石の数が 12 個の場合は 25 通りもある．全部示すと膨大になるので，点対称の図形になるものだけ拾い上げてみよう（図 9）．10 通りある．

このように，後手必勝であることを立証する過程で途中の良形は全て判明している．この良形の表を見ながらゲームをすれば必ず勝てるわけである．しかしながら，表を片手にゲームをするというのも果たしてそれは自分で戦っているのかという疑問がわいて来る．かと言って良形を全部暗記することも困難であろう（悪形か

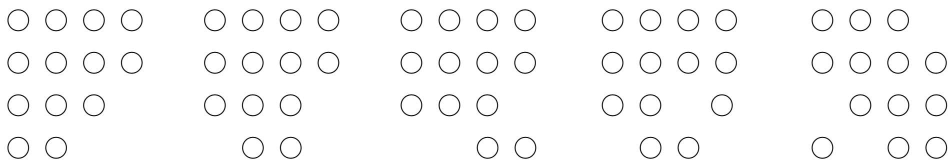

図 8（石数 13 個の良形の全部．通常は使用しない）

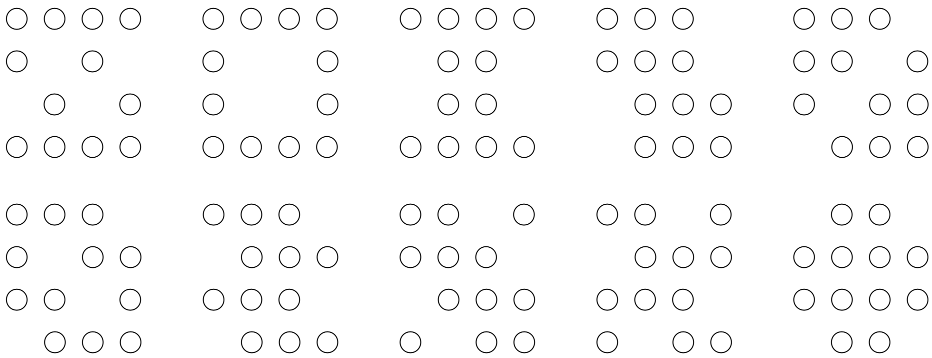

図 9　（石数 12 個の，20 通りの良形のうち点対称のもの）

ら良形に持っていく方法は通常複数あるので，そのうち覚えやすいものだけ 1 つずつを覚えればいい．よって全く不可能というわけではないかも知れない）．それではどうしたら良いか．それは図 6 と図 8 がヒントとなる．このパターンは点対称である．つまり序盤は相手の取った手の点対称の位置を取ればよいのである．点対称の多くは良形なのである．しかし落とし穴が 1 つだけある．それは序盤に出てくる点対称図形の中で唯一悪形があるのでこれだけは避けなければならない．この悪形は覚えておく必要がある．またこのことを利用して，先手で勝つパターンにもっていく戦術もとることができる．何度か同じ相手と対戦していると，相手はこちらの対称戦略に気づく．後手必勝であることもうすうす感付くのである．そして，こちらが先手を取らされたときこの唯一の悪形に追い込むのである．

さて，この序盤の唯一の点対称悪形は何か．それは図 9 を良く見ればわかる．対称な図形が 1 つ抜けている．それは図 10 に示すパターンである．悪形なので黒で示すことにしよう．相手が 1 つずつ石を取って，図

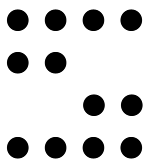

図 10（石数 12 個の対称形で唯一の悪形，「6f+6f」）

9 のパターンに追い込まれされそうになったらどうしたらよいか．それは次の 2 つの良形に持ち込めばよい（図 11）．この場合，それぞれ 1 通りの選択肢しかないので，注意を要する．ここからどういう展開になるか，やや複雑であるが，必勝には変わりない．できるだけ早く石数の少ない良形に持って行った方が懸命であろう．また最初に相手が 2 個取って，図 9 の悪形に追い込まれそうになったときも，やはり図 11 の左のパターンにすれば良い．この場合は他にも選択肢があるが，いろいろ覚えるのは大変だから図 11 のようにしよう．

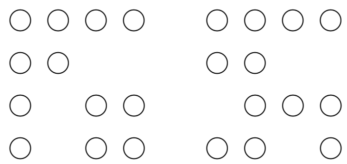

図 11（石数 12 個の悪形にならないための良形）

さて，この続きを書いて，勝つまでのシナリオを完成させても良いのであるが，いさささか興ざめなので，ポイントだけ押さえておこう．10 個の場合も対称図形のほとんどが良形であるが，図 12 に示した 3 通りだけは悪形である．左の 2 つは図 10 の悪形から角の 1 つを取った形と思えば覚えやすい．名前にアルファベットの小文字を使ったのは文字が不足したこともあるが，それ単独では悪形であることを示している．

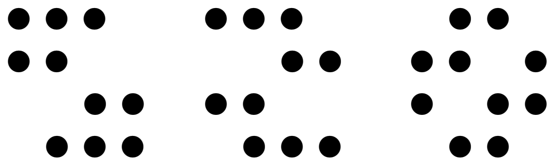

図 12（石数 10 の 3 通りの対称悪形．「5b+5b」，「5n+5n」，「5w+5w」他の対称形 14 通りは全て良形である）

石数 8 の場合も対称形に関して言えば，悪形は圧倒的に少ない（図 13）．

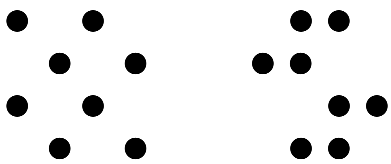

図 13（石数 8 の 2 通りの対称悪形．「1+1+1+1+1+1+1+1」，「4Z+4Z」．他の対称形 22 通りは全て良形）

石数 6 個の場合は点対称形 17 通りのうち，悪形は 4 通りもあるが，全て「1+1+1+1+1+1」の形なので実質 1 種類である．

このように，このゲームは後手必勝であるが，先手であっても相手が最善をつくさない可能性が強いので勝つチャンスはかなりある．つまり完璧に勝ちパターンをマスターすれば，先手，後手を問わず素人相手であればほとんど勝てるのである．

最後に，良形の数はどのように分布しているのか調べてみよう（表 1）．この場合，回転や裏返しで同一のものは数えていないが，図 2 から図 5 までのように本質的に同じ種類のものの数ではないので，石数の少ないときは見かけ上大きい数字になっている．例えば石数が 5 のときの良形は本質的には 1 種類であるが，盤面上では 45 通りもあるわけである．石数 6 の良形の数は 300 通り以上，石数 8 の良形は 200 通り以上はあるのだが，以前計算した資料が残っていないので正確な数字はわからない．空欄は全て 0 である．なおこの表の数字については，検算を行っていないので必ずしも正しくない可能性がある．

表 1 を見ると偶数個の良形が多く分布していることがわかる．このことからも対称戦略（碁では「真似碁」という．ひとつの戦略として名前がついている）が有効であることを物語っている．また，これは必勝法ではないが，相手に 9 個や 7 個にさせることは勝てる可能性が強い．特に 7 個の良形は全部ばらばらの場合だけ

石の数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
全ての場合	3	21	77	252	567	1051	1465	1674	1465	1051	567	252	77	21	3	1
点対称形		3		11		17		24		17		11		3		1
良形の数	3	0	40	26	45	多数	4	多数	13	152	58	25	5	3	0	1
点対称良形		0		4		13		22		14		10		3		1

表 1

なのでわかりやすい．

問題 1 碁石 12 個を 4 行 4 列の正方形のマスに並べたとき，正方形の中心について点対称になる場合は何通りあるか．ただし回転，鏡像は 1 通りと数える．

［解］11 通り．これはすでに答が出ている．しかし，それほど短時間に答が出る問題ではない．さらに次の問題は答の数字が大きくなる．

問題 2 碁石 8 個を 4 行 4 列の正方形のマスに並べたとき，正方形の中心について点対称になる場合は何通りあるか．ただし回転，鏡像は 1 通りと数える．

［解］24 通り．たぶんひたすら数えるしか方法は無いのではないかと思われる．回転，裏返しで同じものがないかよく調べる必要がある．人力で行うにはかなり大変な作業である．

さて，この問題はコンピュータの力を借りて，いわば力ずくで解いてしまったわけであるが，もう少しスマートに解きたいものである．しかし今のところこれが限界である．このゲームはいわゆる石取りゲームの一種であるが，最後に取ったほうが負けという「逆形」のゲームである．最後に取った方が勝ちの「正規形」で考えたほうが幾分わかりやすいと予想できる．しかし，これ以上の興味がいまのところ無いのでこの辺にしておきたいと思う．