最小値原理

問題 1 平面上に $2n$ 個の点

$$P_1, P_2, P_3, \cdots, P_n, Q_1, Q_2, Q_3, \cdots, Q_n$$

がある．このうちどの 3 点も一直線上にない．P_i と Q_j を結び n 本の線分を引く．この n 本のうちどの 2 本も交わらないようにできることを証明せよ．

［証明］n は有限なので，線分の長さの合計を L とした場合，L には最小値がある．L が最小の場合，線分が交わることがあると仮定する．その交わる 2 本の線分を

$$P_aQ_b, P_cQ_d$$

とし，その交点を R とする．

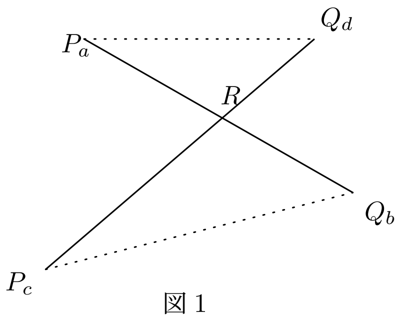

図 1

$$P_aQ_b + P_cQ_d = P_aR + RQ_b + P_cR + RQ_d > P_aQ_d + P_cQ_b$$

となり，これは L が最小であるということと矛盾する．よって，L が最小の場合はどの 2 本も交わることがない．

［証明おわり］

問題 2 平面上に有限個の点があり，そのうちどの 3 点も一直線上になく面積が 1 以下の三角形を作る．このとき全ての点が面積が 4 以下のある三角形に含まれることを証明せよ．

［証明］3 点を結んでできる三角形のうち面積が最大のものを $\triangle ABC$ とする．

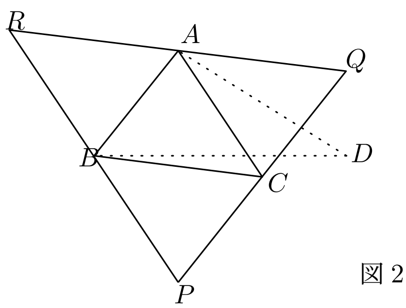

図 2

$\triangle ABC$ に外接する $\triangle ABC$ と相似な面積が 4 の $\triangle PQR$ を図のように作る．$AB \| QP, BC \| RQ, CA \| PR$ とする．直線 PQ について線分 AB の反対側に点 D が存在したと仮定すると

$$\triangle ABD > \triangle ABC$$

となり，$\triangle ABC$ が面積最大であることと矛盾する．同様にどの位置に点が存在しても矛盾をきたす．よって，全ての点は $\triangle PQR$ の内側またはその周上にある．よって題意は証明された． ［証明おわり］

問題 3 平面上に有限個の点があり，そのうちの 2 点を通る直線はどれも少なくとももう一つの点の点を通るとする．ことき すべての点が一直線上にあることを証明せよ．

［証明］全ての点が一直線上にあるということがないと仮定する．2 点を通る直線とその直線上に無い点との距離を考え，その距離が最小となる場合，その直線を l，直線上に無い点を P とする．P から l に引いた垂線の足を H とする．l 上には少なくとも 3 点がある．H を始点とし，l 方向に伸びる 2 本の半直線を考える．その二本の半直線のどちらかは 2 つの点を含む．そのうち H からより遠い点を Q とする．より近い方を R とする．H から直線 PQ に引いた垂線の足を H'，R から引いた垂線の足を R' とする．

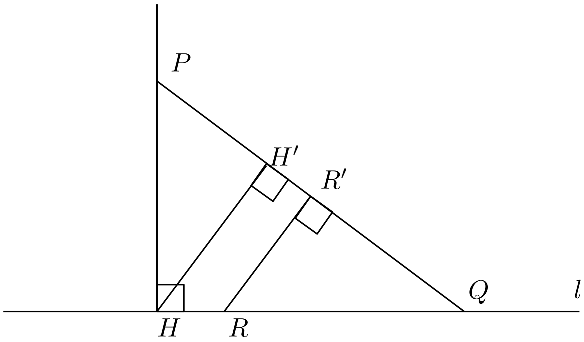

図 3

直角三角形の斜辺は他の辺より長いので

$$PH > HH'$$

また

$$HH' \geq RR'$$

であるので

$$PH > RR'$$

このことは PH が最小であるという仮定と矛盾する．よって，全ての点は一直線上にある． ［証明おわり］

問題 4 平面上に 3 本以上の有限本の直線がある．このうちどの 2 本も平行でない．どの 2 本についてもその交点を通る他の辺が少なくとも 1 本ある．このとき全ての直線がある 1 点で交わることを証明せよ．

［証明］

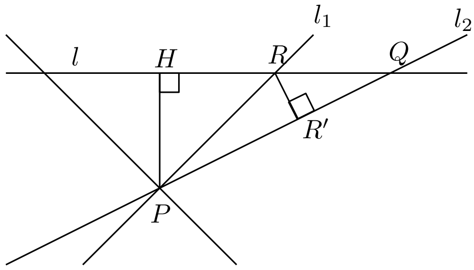

図 4

全ての直線が 1 点で交わるということはないと仮定する．つまりある 2 直線の交点を通らない直線が存在するということである．2 本の直線の交点とその交点を通らない直線の距離を考えその距離を最小とする 2 直線

の交点 P とその交点を通らない直線 l を考える．P から l に引いた垂線の足を H とする．P を通る直線は 2 直線のほかに少なくとももう 1 直線が存在する．つまり P を通る直線は少なくとも 3 本ある．その 3 本のうちで H から見て同じ側で l と交わる 2 直線が少なくとも 2 本あるのでその交点が近い方から，l_1, l_2 とする．l_1, l_2 と l の交点をそれぞれ R, Q とする．R から l_2 に引いた垂線の足を R' とする．

$$\frac{\pi}{2} > \angle PRH > \angle PRR' > 0$$

より

$$PR \sin \angle PRH > PR \sin \angle PRR'$$

$$\therefore PH > RR'$$

このことは PH が最小であることと矛盾する．よって，全ての直線は 1 点で交わる．［証明おわり］

参考文献

[1] 北海道大学数学科『数学の並木道』（日本評論社，2004 年）