三山崩し

古典的な石取りゲームのなかで，三山崩しというものがある．この名前は和算から使われているのではないかと思い，ネットを検索したがそれらしい資料は出てこなかった．一般に石取りゲームには，最後に石を取った方が勝ちというものと，反対に最後に取った方が負けというものがある．[1] にならって前者を**正規形**，後者を**逆形**と呼ぶことにする．一般に逆形のほうが正規形より難しい．逆形の方から解いてみよう．

問題 1 3 個，5 個，7 個の三つの碁石の山がある．交互に石を取り合って，最後に取った方が負けとする．ひとつの山からいくつ取ってもよいが，2 つ以上の山から取ることはできない．必勝法を考えよ．

［解］どちらかが石を取ったあとに残った石の数によって，**良形**と**悪形**に分ける．良形は相手がその後どのようなとり方をしても最善をつくせば勝てる形とする．悪形はそれ以外である．残った石の数がそれぞれ $a, b, c (a \leq b \leq c)$ 個で，それが良形の場合，

$$(a, b, c)$$

と表し，悪形の場合は

$$[a, b, c]$$

と表すことにする．

さて，最初に明らかなのは

$$(0, 0, 1)$$

が良形であることである．ゲームはこの状態で勝ちが完全に決まる．つまりこの形から全ての場合を良形と悪形に分けることができれば，ゲームの全貌が明らかになったことになる．$(0, 0, 1)$ のある山にいくつか石を加えた形は全て悪形である．つまり

$$[0, 0, 2\uparrow], [0, 1, 1\uparrow]$$

が判明する．$\uparrow$ はそれ以上の自然数全てを表すことにする（$\downarrow$ は「以下」）．よって一桁（良形の場合は $(0, 0, 1\uparrow)$，悪形の場合は $[0, 0, 1\uparrow]$ の場合をそう呼ぶことにする．二桁，三桁も同様とする．）の良形は $(0, 0, 1)$ のみであることがわかる．

二桁の場合最小の

$$(0, 2, 2)$$

は良形である（ここで，大小について定義し，さらに証明を加えなければいけないところであるが省略し，先を急ぐ）．よって，次の悪形が判明する．

$$[0, 2, 3\uparrow], [1, 2, 2], [2, 2, 2\uparrow]$$

右の 2 つは本質的に同じものであるが，$a \leq b \leq c$ という条件があるために二つに分けて書いただけである．同様に次の良形，悪形も求まる．

$$(0, 3, 3)$$

$$[0, 3, 4\uparrow], [1, 3, 3], [2, 3, 3], [3, 3, 3\uparrow]$$

これを続けていけば，二桁の良形は

$$(0, n, n) \quad (n \geq 2)$$

のみであり，それ以外の二桁は全て悪形であることがわかる．またこの時点で三桁の悪形は

$$[n-1\downarrow, n, n], [n, n, n\uparrow] \quad (n \geq 2)$$

である．文字で表すとかえってわかりにくいが，要するに 3 つの数字のうち 2 つ以上が同じ数字であるということである．ただし (1,1,1) はのぞく．よって，三桁の最小の良形は

$$(1, 1, 1)$$

である．$(1, 1, 1)$ が良形であることは，このような手順を踏まなくても明らかである．ここから明らかな悪形は

$$[1, 1, 2\uparrow]$$

である．(1,1,1) の次に大きな良形は何であろうか.

$$(1, 2, 3)$$

である．この数はこれまでの悪形のリストに載っていない．つまり

$$[1, 2, 4\uparrow], [1, 3, 3\uparrow], [2, 2, 3], [2, 3, 3\uparrow]$$

は悪形である．$[2, 2, 3]$ は $[n, n, n\uparrow]$ にすでに含まれている．次に小さい良形は

$$(1, 4, 5)$$

である．ここから判明する悪形は

$$[1, 4, 6\uparrow], [1, 5, 5\uparrow], [2, 4, 5], [3, 4, 5], [4, 4, 5], [4, 5, 5\uparrow]$$

である．$[3, 4, 5], [4, 4, 5], [4, 5, 5\uparrow]$ はすでに問題の範囲を超えているので考慮する必要はない．最上桁（一番左の数字）が 1 の場合良形は以上二つである．が全てであり，それ以外は全て悪形である．

次に出現する良形は

$$(2, 4, 6)$$

であり，それに伴う悪形は

$$[2, 4, 7], [2, 5, 6], [3, 4, 6]$$

である．範囲外と既出を省いてある．

よって，

$$(2, 5, 7), (3, 4, 7), (3, 5, 6)$$

が良形であり，

$$[3, 5, 7]$$

は最後の悪形である．

このゲームは先手必勝で 1 手目で最後の 3 種類のどれかにすることである．

今一度良形を羅列すると

$$(0, 0, 1), (0, n, n), (1, 1, 1,), (1, 2, 3), (1, 4, 5), (2, 4, 6), (2, 5, 7), (3, 4, 7), (3, 5, 6)$$

である．

今度は正規形の問題を解いてみよう．

問題 2 3 個，5 個，7 個の三つの碁石の山がある．交互に石を取り合って，最後に取った方が勝ちとする．ひとつの山からいくつ取ってもよいが，2 つ以上の山から取ることはできない．必勝法を考えよ．

［解］一桁は全部悪形である．

$$[0, 0, 1 \uparrow]$$

最小の良形は当然

$$(0, 1, 1)$$

である．よってここから派生する悪形は

$$[0, 1, 2 \uparrow], [1, 1, 1 \uparrow]$$

である．次なる良形は

$$(0, 2, 2)$$

これは逆形でも良形であった．新たな悪形は

$$[0, 2, 3 \uparrow], [1, 2, 2], [2, 2, 2 \uparrow]$$

次の良形は

$$(0, 3, 3)$$

悪形は

$$[0, 3, 4 \uparrow], [1, 3, 3], [2, 3, 3], [3, 3, 3 \uparrow]$$

このように，二桁の良形は

$$(0, n, n) \quad (n \geq 1)$$

であり，これ以外の二桁は全て悪形である．また 3 桁の悪形はこの時点で

$$[n-1 \downarrow, n, n], [n, n, n \uparrow] \quad (n \geq 2)$$

である．逆形の場合と比べると，良形に $(0, 1, 1)$ が，悪形に $[1, 1, 1]$ 含まれることを除けば同じである．3 桁の数字で最も小さい良形は何であろうか．

$$(1, 2, 3)$$

これも，逆形においても良形であった．これに伴う悪形は既出のものを省いて

$$[1, 2, 4 \uparrow], [1, 3, 3 \uparrow], [2, 2, 3], [2, 3, 3 \uparrow]$$

つまりこれらも全て逆形と同じである．つまり最後まで，このことは変わらず，良形の全ては

$$(0, n, n), (1, 2, 3), (1, 4, 5), (2, 4, 6), (2, 5, 7), (3, 4, 7), (3, 5, 6)$$

であり先手必勝である．つまり，正規形でも逆形でも最初の戦略は同じであるということができる．

さて，問題は解けたわけであるが，これでは一般の場合に対応できない．そこで数学的に考えてみよう．

問題 2 の良形を全て二進数に直してみよう．

$$(0, 1, 1), (0, 10, 10), \cdots, (1, 10, 11), (1, 100, 101), (10, 100, 110), (10, 101, 111), (11, 100, 111), (11, 101, 110)$$

そして，3 つの数の各桁の数を単純に足して繰り上がりをしないで計算してみると，

$$2, 20, \cdots, 222, 22, 222, 222, 222, 222, 222$$

と各桁は 2 または 0 となっていることがわかる．それに対して，悪形で同じ計算を行うと，少なくともひとつの桁で 1，つまり奇数が存在する．これはなぜかというと，2 進数の各桁を加えた数が全て偶数の場合が良形であるが，1 手行うことによって，良形から良形へは移すことができない．3 つのうちひとつの数字が変わるということは，どれかの桁が偶数から奇数へ，あるいは奇数から偶数にかわることであるので，まったく遇奇がかわらないということがありえないからである．この問題では最終的良形は $(0, 0, 0)$ であるから，各桁の和が偶数になるようにすれば良形を維持できる．

このことを排他的論理和を使うともう少しすっきりと説明できる．良形の数を二進表示し，各桁の排他的論理和をとると全て 0 になる．このように良形を作っていけば，山の数や石の数が変っても対応できる．ゲームの始めが良形であったら後手必勝で，悪形であったら先手必勝である．

また，これらのことから，次の定理が導ける．

定理 1 正規形 n 山崩しにおいて，悪形から良形にする手の場合の数は山の数を超えることはない．またひとつの山から取る数は 2 通り以上はない．また一番多い山には必ず手がある．

排他的論理和が全て 0 にすることは山の数だけの可能であるが，「減らす」ことに限定すると山の数より小さい場合があるわけである．

さて，これで正規形三山崩しの全貌はほぼ解明できたわけであるが，実際の対戦において 2 進演算や排他的論理和を計算するのは現実的ではない．紙と鉛筆を持ちながらというのもスマートではない．それではどのようにしたらいいだろうか．問題 1 の場合で考えてみよう．

○○　○
○○○○　○
○○○○　○○　○

というように，2 進数に対応するように区切って見る．そうすると，区切られた 1 個だけが三個なので，どれかの山から 1 個とればよい．このように常に区切っておけば最後まで手を間違えることはないが，それとなくやらないと相手に気づかれてしまうかも知れない．

このように，排他的論理和で説明できるのは正規形のみであった．逆形では最終的な良形は $(0, 0, 1)$ でありこれは排他的論理和は 0 にならない．$(1, 1, 1)$ も同様であるが，他の良形は全て排他的論理和が 0 である．つまり各数字が 1 以下のときは，1 の個数が奇数個で良形，偶数個で悪形となるわけである．まとめてみよう．

定理 2 逆形 n 山崩しにおいて，良形は次の二つの場合である．

1. 各山の石の個数が最大で 1 の場合，その 1 の個数が奇数であること．
2. 各山の石の個数の最大が 1 を超得る場合，その個数 2 進表示して，さらに各桁の排他的論理和をとると 0 になること．

［証明］1. の場合が良形であることは，ほぼ自明なので証明を省略する．2．の場合は 2 個以上の山が 2 山以上ある．もし 1 山しか 2 個以上の山がないとすると，2 進表示した場合に 2 桁以上の桁をとる数が 1 つだけなので，排他的論理和をとった場合に 0 になりえないからである．また，二人で石を取り合っていくと，どの時点かで 2 個以上の山が 2 山になるときが必ずある．2 山から 1 山に変るときが 2．から 1．に移るときであ

る．2 個以上ふた山の良形で相手に渡したとき，相手の選択肢は最大三種類ある．まず第一に 2 個以上の山を全部とってしまう．このときは 1. に当てはまるように取れば良形に移行できる．次の選択は相手がひとつだけ残して 2 以上の山を崩す場合である．この場合も，1. に容易に移行できる．三つ目の選択は 2 以上の山をとって，なお 2 以上残す場合と，1 個しかない山を崩す場合である．この場合は 2. が継続しているわけであるから，2. を保つように取ればよい．またそれが可能である． ［証明おわり］

制限付き三山崩し

定理 3 q 個まで石を取れることにした正規形 n 山崩しの良形はそれぞれの山の数の $q+1$ を法とする剰余を二進数表示にし，排他的論理和を求めた場合，0 になるような場合である．

［証明略］

むしろ制限付きの方が良形を維持することは容易である．石の数が多い場合は相手が取った山と同じ山から，相手の手と加えて $q+1$ となるような数を取ればいいのである．もちろんそれ以外でも良形はあり得るが，この方が簡単である．

参考文献

[1] 一松信『石とりゲームの数理』（森北出版，1981 年）