正四面体に含まれる平行六面体の体積の総和

問題 1 面積 1 の正三角形 n^2 個を図 1 のように n 段に並べた図形がある．この図形の中にある平行四辺形の面積の総和を求めよ．

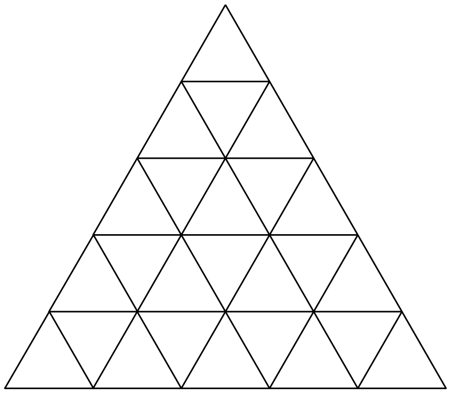

図 1

問題の解答に入る前に次の公式を確認しておく．

定理 1

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5) \quad (2)$$

［(1) の証明］$n = 1$ のとき，左辺=右辺=4!で成り立つのは明らか．また $n = j$ のときに成り立つと仮定すると，

$$\sum_{k=1}^{j} k(k+1)(k+2)(k+3) = \frac{1}{5}j(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{j+1} k(k+1)(k+2)(k+3)\\ =&\frac{1}{5}j(j+1)(j+2)(j+3)(j+4) + (j+1)(j+2)(j+3)(j+4)\\ =&\frac{1}{5}(j+1)(j+2)(j+3)(j+4)(j+5)\end{aligned}$$

となり，$n = j+1$ でも成り立ち，数学帰納法により証明された．［証明おわり］

(2) についての証明も同様なので省略する．さらに一般化すれば

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\cdots(k+l) = \frac{1}{l+2}n(n+1)(n+2)(n+3)\cdots(n+k+1)$$

も成り立つ．また，公式と呼べるかどうかわからないが，次の補題も証明しておこう．

補題 1

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k+1)(n-k+2) = \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(n+3) \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3) = \frac{1}{20}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \quad (4)$$

［(3) の証明］

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k(n-k+1)(n-k+2) &= \sum_{k=1}^{n}\{(n+3)(n-k+1)(n-k+2)-(n-k+3)(n-k+1)(n-k+2)\} \\
&= (n+3)\sum_{m=1}^{n} m(m+1) - \sum_{m=1}^{n} m(m+1)(m+2) \\
&= \frac{1}{2}(n+3)n(n+1)(n+2) - \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3) \\
&= \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(n+3)
\end{aligned}$$

［証明おわり］

(4) の証明も同様なので省略する．さらに一般化すれば，

$$\sum_{k=1}^{n} k(n-k+1)\cdots(n-k+l) = \frac{1}{(l+1)(l+2)}n(n+1)(n+2)\cdots(n+l+1)$$

も成り立つ．

［解］平行四辺形は三種類の傾きの線分のうちどの二つを選ぶかによって三種類に分類できる．その最小のものを図示すれば図 2 に示したそれぞれの平行四辺形である．この三種類に分類した平行四辺形はどれも同じ個数だけある．よって，その一種類のものを数えてその面積を合計し，さらに 3 倍したものがこの問題の答えである．

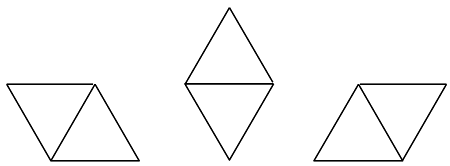

図 2

さて，このままの形で論じてもよいのだが，多少見やすくするために一次変換をほどこし図 3 の左図のようにする．面積が変らないようにもできるが，便宜上，最小の正方形の面積が 1 になるようにする．よって，あとで面積を 2 倍することを忘れてはならない．

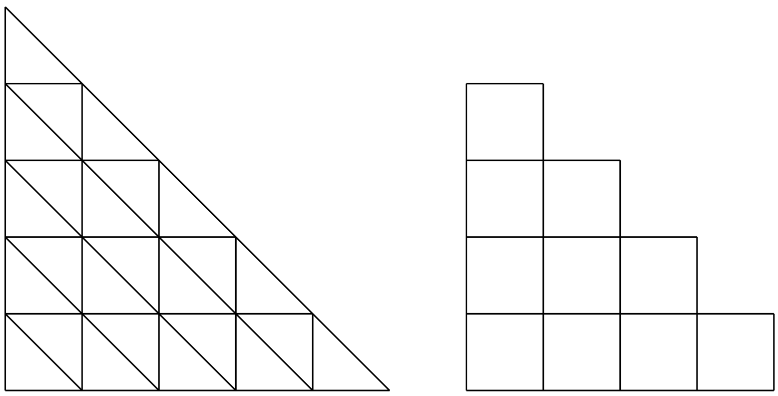

図 3

さらに，三種類の平行四辺形のうち一種類だけを問題にすればよいので，余分な線を省いて図 3 の右図のようにする．つまり，このように並べた図形の中の長方形の面積の合計を求めればよい．

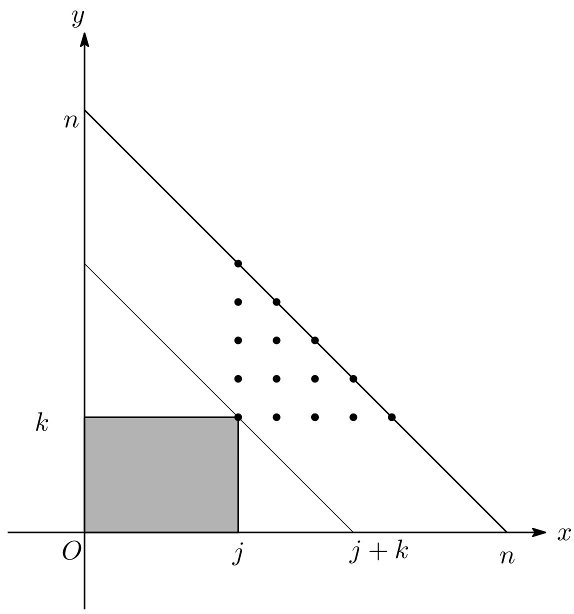

図 4

横の長さが j，縦の長さが k の長方形の個数は，図 4 のように，長方形の右肩の頂点の動きうる格子点の数を数えればよいので，

$$\frac{1}{2}(n-j-k+1)(n-j-k+2) \tag{5}$$

である．しかし j, k は n までの全ての自然数値をとりうるわけではなく，k について言えば，j の値によって制約を受ける．つまり (5) の最初の括弧は正でなければならず，

$$n-j-k+1 \geq 1$$

より，

$$k \leq n-j$$

また，当然のことながら

$$1 \leq j \leq n-1$$

でもある．つまり求める面積の総和 S は

$$\begin{aligned} S =& \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-j} jk(n-j-k+1)(n-j-k+2) \\ =& \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} j \sum_{k=1}^{n-j} k(n-j-k+1)(n-j-k+2) \end{aligned}$$

補題 1 の (3) を用いて，

$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}\sum_{j=1}^{n-1} j(n-j)(n-j+1)(n-j+2)(n-j+3)$$

補題 1 の (4) を用いて，

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{30}(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

これが長方形の面積の合計である．これを 2 倍し，さらに最初に述べたように 3 倍すればよい．よって，求める平行四辺形の面積の総合計は

$$\frac{1}{120}(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \cdots Ans.$$

これは

$$6 \cdot {}_{n+4}\mathrm{C}_6$$

ともかけるわけだが，これが図形的にどのような意味を持っているのかよくわからなかった．

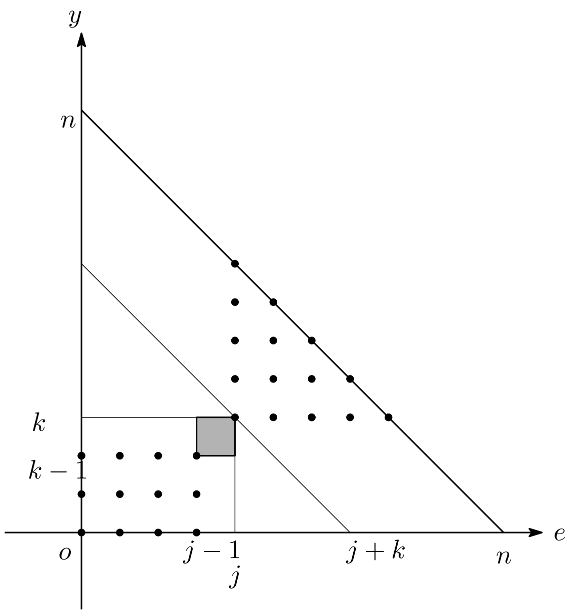

図 5

［別解 1］別解と言うほどでもないが，少しだけ考えを変えてみよう．図 5 のような最小の正方形が含まれる長方形がいくつあるか考える．このような長方形は右上の頂点と，左下の頂点の二つが決まれば決定するのでそれらがいくつあるか数えると，左下が

$$jk \text{ 個}$$

の格子点が頂点となりうる．また右上は

$$\frac{1}{2}(n-j-k+1)(n-j-k+2) \tag{6}$$

個の格子点が頂点となりうる．これらの長方形の個数を全て数え上げればよいので，長方形の面積の総和 S は

$$S = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-j} jk(n-j-k+1)(n-j-k+2)$$

となり，先ほどの式と全く同じである．後略

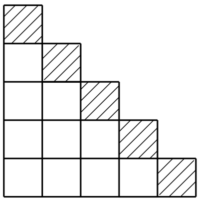

図 6

［別解 2］階差をとって考えてみよう．長方形の面積の総和を S_n とすれば，$S_n - S_{n-1}$ は図 6 の斜線の部分の正方形を含む長方形の面積の総和である．つまり

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-1} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{n-i} jk \\ &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(n-i)(n-i+1)i(i+1) \end{aligned}$$

ここでちょっと細工をして

$$\begin{aligned} S_n - S_{n-1} &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(n-i)(n-i+1)i(-(n-i+2)+(n+3)) \\ &= \frac{1}{4}\left\{(n+3)\sum_{i=1}^{n} i(n-i)(n-i+1) - \sum_{i=1}^{n} i(n-i)(n-i+1)(n-i+2)\right\} \\ &= \frac{1}{4}\left\{\frac{1}{12}(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3) - \frac{1}{20}(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)\right\} \\ &= \frac{1}{120}(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3) \end{aligned}$$

$S_1 = 0$ より

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{120}\sum_{k=2}^{n}(k-1)k(k+1)(k+2)(k+3) \\ &= \frac{1}{120}\sum_{j=1}^{n-1} j(j+1)(j+2)(j+3)(j+4) \\ &= \frac{1}{720}(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \end{aligned}$$

後略.

さて，例によって 3 次元に拡張してみよう．

問題 2 写真 1 のような立体図形の中にある平行六面体の体積の総和を求めよ．ただし，最小の平行六面体（写真 2）の体積を 1 とする．また写真の場合は $n = 3$ であり，一般の n について解くこと．

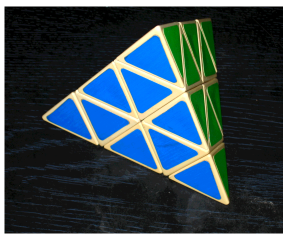

写真 1

この図形は正四面体と正八面体で充填されていることにする（写真 3）．正八面体をさらに分割して体積の等しい四つの四面体にすることもできるが，宿題の拡張にふさわしいとは言いがたい．

［解］平行六面体は大きく分けて何種類あるだろうか．一番外側の正四面体の 4 つの面のうち 3 つを選びそれらと平行な面で平行六面体を作ることを考えると，

$${}_4\mathrm{C}_3 = 4$$

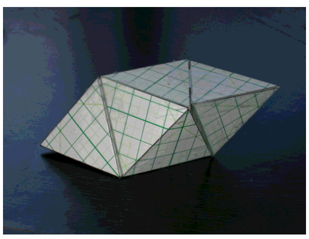

写真 2

種類の平行六面体が可能である．このうちの一種類について調べ 4 倍すればよい．考え方は 2 次元の場合と同じで求める体積の総和 V は，これまでの公式を動員して，

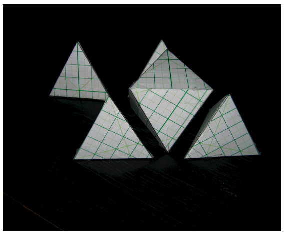

写真 3

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{4}{3!}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-i}\sum_{k=1}^{n-i-j} ijk(n-i-j-k+1)(n-i-j-k+2)(n-i-j-k+3) \\
&= \frac{4}{3!}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-i} ij \sum_{k=1}^{n-i-j} k(n-i-j-k+1)(n-i-j-k+2)(n-i-j-k+3) \\
&= \frac{4}{3!}\cdot\frac{1}{4\cdot 5}\sum_{i=1}^{n-1} i \sum_{j=1}^{n-i-1} j(n-i-j)(n-i-j+1)(n-i-j+2)(n-i-j+3)(n-i-j+4) \\
&= \frac{4}{3!}\cdot\frac{1}{4\cdot 5}\cdot\frac{1}{6\cdot 7}\sum_{i=1}^{n-2} i(n-i-1)(n-i)(n-i+1)(n-i+2)(n-i+3)(n-i+4)(n-i+5) \\
&= \frac{4}{3!}\cdot\frac{1}{4\cdot 5}\cdot\frac{1}{6\cdot 7}\cdot\frac{1}{8\cdot 9}(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6) \\
&= \frac{4}{9!}(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6)\cdots Ans. \qquad (*)
\end{aligned}
$$

$n=2$ では平行六面体はない（写真 4）．

やはり (*) も

$$4 \cdot {}_{n+6}\mathrm{C}_9$$

とかけるわけだが，これがどのような意味を持っているのかわからない．これを m 次元正 $m+1$ 胞体に拡張すれば，

$$(m+1) \cdot {}_{n+2m}\mathrm{C}_{3m}$$

となることが予想されるわけだが，それが正しいのかどうかわからない．一次元にあてはめると「数直線上で整数を両端の座標とする長さ n の線分の中に含まれる，両端が整数座標である線分の長さの総和は次の式で与えられる」

写真 4

$$(1+1) \cdot {}_{n+2}\mathrm{C}_3$$

これは正しいと言えるだろうか．${}_{n+2}\mathrm{C}_3$ の方は問題ないとして，その前の 2 倍はどう解釈したらよいだろうか．線分を有向線分と考えればつじつまは合う．つまり AB と BA が別の線分と考えれば 2 倍しても構わないことになるがちょっと強引だ．四次元の場合はどうなるだろう．正五胞体の 5 すみを切り取ると，正 16 胞体になると思って作図してみたら，頂点が 10 個の準正多胞体?になってしまった．以後迷宮入りしたままである．