鳩ノ巣原理

問題 1 n 次元ユークリッド空間に 2^n+1 個の点があり，それらの座標は全て整数である．これらの中から適当に 2 個の点を選んで，その中点の座標を全て整数にすることができる．

［解］2 次元で考えてみよう．偶数を 0，奇数を 1 としても一般性を失わない．格子点の座標は

$$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$$

の $4(=2^2)$ 通りで，5 個目はこの 4 通りのどれかと等しくなる，その等しくなったもの同士で中点を求めれば必ず整数となる．n 次元でも同様である．

次の問題は，ある意味で問題 1 の拡張ともいえるが，鳩ノ巣原理でぱっと解けるという性質の問題ではない．

問題 2 2 次元ユークリッド空間（つまり平面）に，どの 3 点も一直線上に無い格子点が 9 個ある．これらのうちから適当に 3 点を選んで三角形を作るとその重心がやはり格子点である場合があることを証明せよ．格子点とは座標が全て整数であるような点をさし，以後同様とする．

［解］まず，1 次元で考えてみよう．1 次元ではもちろん三角形とはならないが，3 つの座標の平均を重心と定義しよう．問題 1 と同様に，座標を 3 を法とする合同類としても一般性は失われないので，以後座標は (0),(1),(2) の 3 種類とする．問題 1 と同様に考え 3 個の点があれば全部出揃い，4 個目には必ず重心を格子点にすることができるように思ったら早合点である．確かに

$$(0),(1),(2)$$

などと，3 つの種類がそろっていればすでに重心が格子点であるのだが，3 つの点が

$$(0),(0),(1)$$

で 4 つ目が (0) あるいは (2) ならばよいのだが，(1) の場合，つまり

$$(0),(0),(1),(1)$$

の 4 点ではどう選んでも重心を格子点にすることができない．このように 4 点でなお足らないような場合はほかに

$$(0),(0),(2),(2)$$

と

$$(1),(1),(2),(2)$$

の場合である．どの場合も 5 個目がどんな値であっても重心が格子点の三角形を 1 つ以上作れる．それでは 2 次元で考えてみよう．座標の種類は全部で 9 種類，

$$(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(2,2)$$

である．このうち 0 と 1 のみを用いた点だけで考えてみよう．つまり，

$$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$$

の 4 種類ではどうだろうかということである．4 種類を重複を許して 9 個並べると，必ず同じ点が 3 個以上の場合が出てくる．これは鳩ノ巣原理である．その点を使えば重心は格子点である．実際

$$(0,0),(0,0),(0,1),(0,1),(1,0),(1,0),(1,1),(1,1)$$

の 8 点ではどうやっても重心を格子点にすることができないが，あと 1 点加われば可能である．0,1 の場合に限らず，2 種類の数字たとえば，0,2 あるいは 1,2 の場合でも同様である．

ここまでは単純である．それでは 0,1,2 の 3 つの数字を必ずつかうとどうなるであろうか．

$$(0,*),(1,*),(2,*) \tag{1}$$

と大きく 3 種類の座標に分けて，y 座標に 9 個の 0,1,2 を配布するのだが，どのようにしても必ず x 座標の和と y 座標の和が 0 になるような組み合わせができる．この場合も鳩ノ巣原理を使ってきれいに解ければいいのだが，残念ながらそういうわけにはいかなかった．うまく整理して表現できないので詳細は省略する．

問題 3 多面体の各面のうちで辺の数が同数である二つの面が必ず存在することを証明せよ．

［証明］多面体の面のうちで最も多い辺を持つ多角形の辺の数を n とする．その n 本の辺は全て他の面と辺を共有している．つまり多角形はほかに n 個以上はあるわけである．その n 個の多角形は最も辺の少ない三角形から n 角形まで $n-2$ 種類のうちのどれかである．よって 2 個以上は重複しているわけで，鳩ノ巣原理により題意は証明された．2 個以上重複しているので，辺数が同数の多角形が 3 つ以上，あるいは辺の数が同数の多角形が 2 組以上と，条件を厳しくしても成り立つ．［証明終わり］

参考文献

[1] 北海道大学数学科『数学の並木道』（日本評論社，2004 年）