Σ に関する問題

それほど興味深い問題ではないが，一応記述しておこう．

問題 1

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, m, n \in \mathbf{I}$$

$$a_0 = 0 < a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 = 20$$

$$0 \leq m < n \leq 20$$

とする．

$$m \leq a_k \leq n$$

を満たす a_k のうち最小のものを a_i，最大のものを a_j（1 つしかないときは両者は同一）とするとき，

$$f(m,n) = a_j - a_i - (j-i)$$

とする．このような a_k が無いときは $f(m,n)=0$ とする．

このとき，

$$S = \sum_{0 \leq m < n < \leq 20} f(m,n)$$

を最大にする a_1, a_2, a_3 を求めよ．

［解］

$$S = \sum_{m=0}^{19} \sum_{n=m+1}^{20} f(m,n)$$

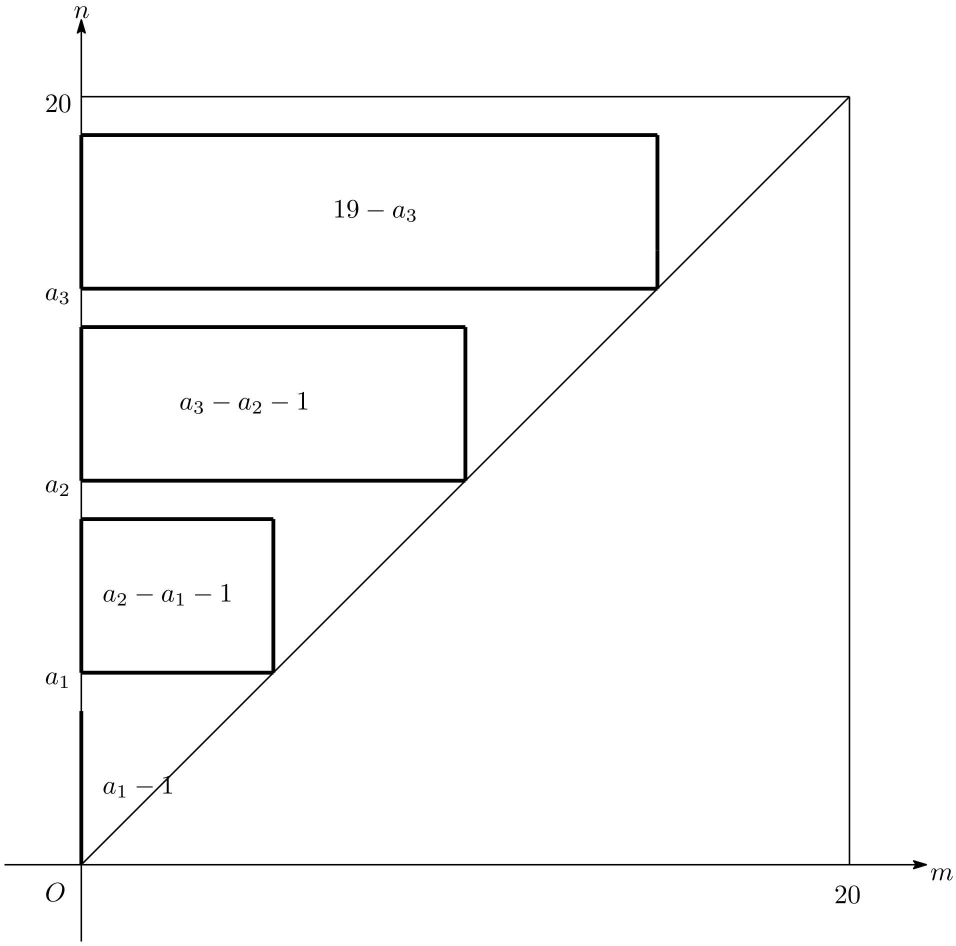

図 1（単なるイメージ図であるので読み飛ばすべし）

図 1 ではわかりにくいが，m と n の間に境界を含んで a_k と a_{k+1} が両方とも含まれれば，その m, n に関して，$a_{k+1}-a_k-1$ を加えるという作業を繰り返してゆけばよいのであって，結局次のような式となる．図形的に言うと，三角錐に含まれる 4 つの直方体の体積の和（隙間はあるが）になるが，図にかくことは難しいし，言葉で表現することも難しい．とにかく計算してみよう．

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{4}(a_k-a_{k-1}-1)(21-a_k)(a_{k-1}+1) \\
&= (a_1-1)(21-a_1)+(a_2-a_1-1)(21-a_2)(a_1+1)+(a_3-a_2-1)(21-a_3)(a_2+1)+(19-a_3)(a_3+1)
\end{aligned}
$$

S はどの a_k についても 2 次関数である．a_1 で微分してみよう．

$$\frac{dS}{da_1}=a_1(2a_2-44)-{a_2}^2+23a_2-20$$

$\dfrac{dS}{da_1}=0$ とすると，

$$a_1=\frac{{a_2}^2-23a_2+20}{2a_2-44}=\frac{1}{2}a_2-\frac{1}{2}-\frac{1}{a_2-22}$$

$$\frac{1}{2}a_2-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}a_2-\frac{1}{2}-\frac{1}{a_2-22}<\frac{1}{2}a_2$$

となるので，a_2 が偶数のときは

$$a_1 = \frac{1}{2}a_2 \tag{1}$$

のときに S は最大となり，a_2 が奇数のときは

$$a_1 = \frac{a_2 - 1}{2} \tag{2}$$

のときに最大となる．こんどは，S を a_3 で微分してみよう．

$$\frac{dS}{da_3} = (-2a_2 - 4)a_3 + {a_2}^2 + 23a_2 + 40$$

$\dfrac{dS}{da_3} = 0$ とすると，

$$a_3 = \frac{{a_2}^2 + 23a_2 + 40}{2a_2 + 4} = \frac{1}{2}a_2 + \frac{21}{2} - \frac{1}{a_2 + 2}$$

$$\frac{1}{2}a_2 + 10 < \frac{1}{2}a_2 + \frac{21}{2} - \frac{1}{a_2 + 2} < \frac{1}{2}a_2 + \frac{21}{2}$$

となるので，a_2 が偶数のときは

$$a_3 = \frac{1}{2}a_2 + 10 \tag{3}$$

のときに S は最大となり，a_2 が奇数のときは

$$a_1 = \frac{a_2 + 1}{2} + 10 \tag{4}$$

のときに最大となる．a_2 が偶数のとき (1) に (2),(4) を代入して計算すると（途中の計算は煩雑なので省略する），

$$S = -5{a_2}^2 + 100a_2 + 156$$

となり，$a_2 = 10$ で最大値 656 をとる．望みは薄いが a_2 が奇数のときも一応調べておこう．(1) に (3),(5) を代入して計算すると，

$$S = -5{a_2}^2 + 100a_2 + 160$$

となるので，$a_2 = 9, 11$ で最大値 655 をとる．こちらはわずかに 1 だけ小さい．よって，

$\underline{a_1 = 5, a_2 = 10, a_3 = 15 \text{ のとき } S \text{ は最大値 } 656 \text{ をとる．}}$

この問題の難しいところは $f(m, n) = a_j - a_i - (j - i)$ の $-(j - i)$ によるものであると想像できる．この部分がなければ，何らかの有名不等式に帰着でき，a_k の個数も増やせるのではないかと予想できる．が，これ以上深入りするほどの問題ではないような気がするのでここでやめる．