正 n 角形の頂点を結んでできる三角形の分類

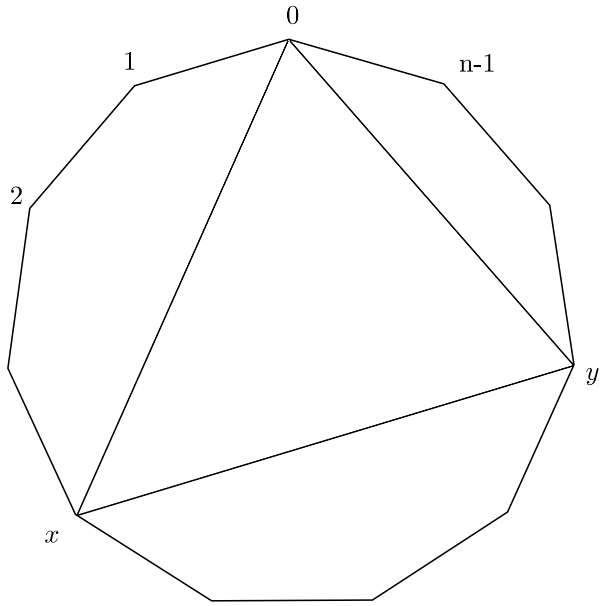

図 0

正 n 角形の頂点を結んでできる三角形の総数は言うまでもなく ${}_n\mathrm{C}_3$ であるが，これを座標平面の格子点を使って考えてみよう．一つの頂点を固定して考えその頂点を 0 とする．そこから左回りに順番に 1 から $n-1$ まで番号をつける．

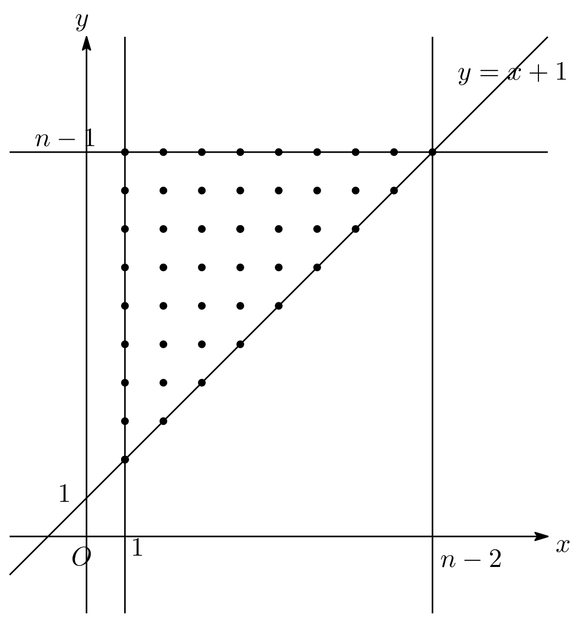

図 1

0 番から中心に向かって右側の点の番号を x，左の点を y とすると（図 0），x, y のとりうる範囲は図 1 のようになる（図 1 は $n = 11$ の場合）．つまりその個数は

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \frac{1}{2}(n-2)(n-1)$$

である．0 番に固定した 1 点を全ての点で数えると，三角形の個数は

$$\frac{1}{2}(n-2)(n-1)n$$

であるが，この中には同じものが 3 回ずつ出てくるので 3 で割って

$$\frac{1}{6}(n-2)(n-1)n \quad (\text{個}) \tag{1}$$

である．

問題 1 正 n 角形の頂点を結んでできる三角形のうち，鋭角三角形，直角三角形，鈍角三角形の個数を求めよ．

［解］n が偶数か奇数によって，直角三角形ができるかできないかの違いがあるので結果が違う．まず奇数の場合から調べよう．(1) を導く際に用いた方法をそのまま使用する．x, y の意味も同じとする．$x, y-x, n-y$ が全て $\dfrac{n}{2}$ 未満であることが鋭角三角形になる必要十分条件である．n は奇数なので，

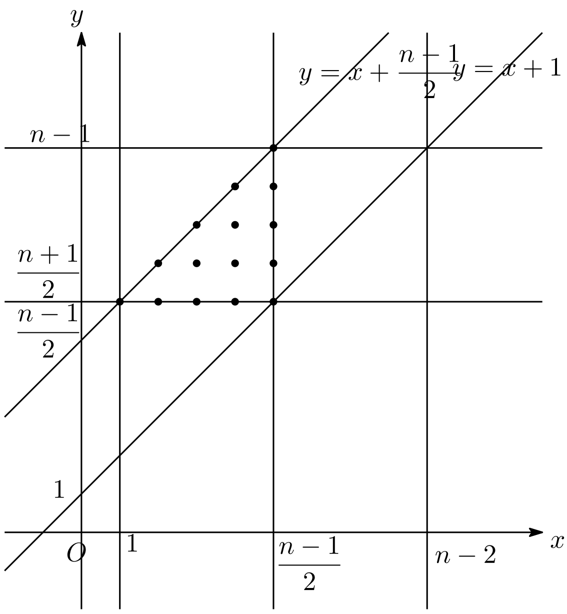

図 2

$$\begin{cases} x \leqq \dfrac{n-1}{2} \\ y \leqq x + \dfrac{n-1}{2} \\ y \geqq \dfrac{n+1}{2} \end{cases}$$

図に表すと図 2 のようになる．頂点 0 番を含む鋭角三角形の個数は

$$1+2+3+\cdots+\frac{n-1}{2}=\frac{1}{8}(n-1)(n+1)$$

これを n 倍して 3 で割ると，鋭角三角形の総数は

$$\frac{1}{24}(n-1)n(n+1) \tag{2}$$

鈍角三角形の個数は (1) − (2) より

$$\frac{1}{6}(n-2)(n-1)n-\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)=\frac{1}{8}(n-3)(n-1)n$$

次に n が偶数の場合について調べてみよう．鋭角三角形になるための必要十分条件は

$$\begin{cases} x \leq \dfrac{n}{2}-1 \\ y \leq x+\dfrac{n}{2}-1 \\ y \geq \dfrac{n}{2}+1 \end{cases}$$

頂点 0 番を含む鋭角三角形の個数は

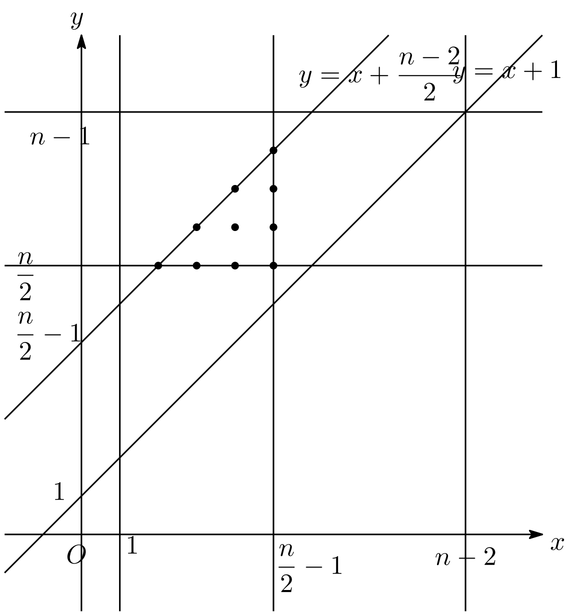

図 3

$$1+2+3+\cdots+\frac{n-4}{2}=\frac{1}{8}(n-4)(n-2)$$

これを n 倍して 3 で割ると，鋭角三角形の総数は

$$\frac{1}{24}(n-4)(n-2)n \tag{3}$$

直角三角形になる場合は図 4 のようになる．その総数は

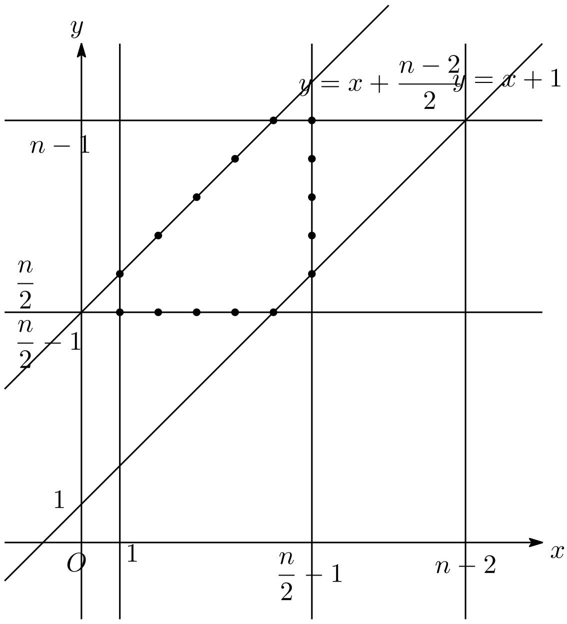

図 4

$$3\left(\frac{n}{2}-1\right) \times n \div 3 = \frac{1}{2}(n-2)n \tag{4}$$

鈍角三角形の個数は (1) − (3) − (4) より

$$\frac{1}{6}(n-2)(n-1)n - \frac{1}{24}(n-4)(n-2)n - \frac{1}{2}(n-2)n = \frac{1}{8}(n-4)(n-2)n$$

まとめると n が奇数のとき，鋭角三角形は

$$\frac{1}{24}(n-1)n(n+1) \text{ (個)}$$

鈍角三角形は

$$\frac{1}{8}(n-3)(n-1)n \text{ (個)}$$

n が偶数のとき，鋭角三角形は

$$\frac{1}{24}(n-4)(n-2)n \text{ (個)}$$

直角三角形は

$$\frac{1}{2}(n-2)n \text{ (個)}$$

鈍角三角形は

$$\frac{1}{8}(n-4)(n-2)n \text{ (個)}$$

よって，n が十分大きければ，鋭角三角形の数はは鈍角三角形の $\frac{1}{3}$ に近づく．