

コスト行列とハンガリー法

例題 A 書店は支店を 3 つ持っている。支店の改装を一斉に行う。a, b, c の業者に見積もりをとった。ところ次の表のようになった。コストを最も安くするには、各店をどの業者に依頼するのがよいか。

	支店 1	支店 2	支店 3
業者 a	250	180	190
業者 b	230	190	200
業者 c	240	170	210

(単位：万円)

解 行列に書き表すと

$$C = \begin{pmatrix} 250 & 180 & 190 \\ 230 & 190 & 200 \\ 240 & 170 & 210 \end{pmatrix}$$

これをコスト行列といい、このコスト行列を解くことを割り当て問題をいう。すべての場合をしらみつぶしに調べて最適な割り当てを求めることも可能だが一般的でない。以下ハンガリー法について述べる。たとえば、

業者 a 支店 3 業者 b 支店 1 業者 c 支店 2

という割り当てを

$$\langle 3, 1, 2 \rangle$$

という順列で表すことにする。また順列を σ という記号で表すことにする。またコスト行列が C のとき、順列 σ に対応して割り当てたときの総コストを $C(\sigma)$ で表すことにすることにする。たとえば、上の例では

$$C(\langle 3, 1, 2 \rangle) = 190 + 230 + 170 = 590$$

$$C(\langle 1, 3, 2 \rangle) = 250 + 200 + 170 = 620$$

となる。つまり $C(\sigma)$ を最小にする σ を求めることに問題は帰着される。

定理 C を n 次コスト行列とする。 C の 1 つの行または列に同じ数を加えて得られるコスト行列を C' とする。 $1, 2, 3, \dots, n$ の異なる順列 σ_1 と σ_2 に対して、

$$C(\sigma_1) < C(\sigma_2) \implies C'(\sigma_1) < C'(\sigma_2)$$

が成り立つ

1 つの行について同じ数を加えるということは、その業者が一斉に値上げまたは値引きをするということである。そのような値段の変更があってもコストの順位は変わらない。同じく、ある列に同じ数を加えるということは、ある店が一定の改装費の増減を行うことで、やはり $C(\sigma)$ の順位に影響を与えない。このことを使って

割り当て問題を解いていこう。

$$\begin{pmatrix} 250 & 180 & 190 \\ 230 & 190 & 200 \\ 240 & 170 & 210 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 70 & 0 & 10 \\ 230 & 190 & 200 \\ 240 & 170 & 210 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 70 & 0 & 10 \\ 40 & 0 & 10 \\ 240 & 170 & 210 \end{pmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 70 & 0 & 10 \\ 40 & 0 & 10 \\ 70 & 0 & 40 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 30 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \\ 30 & 0 & 40 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 30 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \\ 30 & 0 & 40 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

各行，各列に0が必ずある．各行，各列から重複しないように0を選ぶことができればそれが解である．3行目は0が1つしかないのをこれを選ぶ．太字はもう選ぶことができない．この時点で

$$\sigma = \langle *, *, 2 \rangle$$

である．

$$\begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{30} & 0 & \mathbf{30} \end{pmatrix}$$

次に，第一行目に注目すると0は3列目に残っているのみなので，

$$\begin{pmatrix} \mathbf{30} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{30} & 0 & \mathbf{30} \end{pmatrix}$$

のこりは必然的に2行1列の0を選ぶことになる．つまり

$$\sigma = \langle 3, 1, 2 \rangle$$

が解である．

問題 1 コスト行列が

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 4 & 9 \\ 3 & 10 & 5 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 7 & 6 & 10 \\ 5 & 9 & 6 & 5 & 9 \\ 4 & 8 & 5 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

で与えられる割り当て問題を解け．

解

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 4 & 9 \\ 3 & 10 & 5 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 7 & 6 & 10 \\ 5 & 9 & 6 & 5 & 9 \\ 4 & 8 & 5 & 6 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \langle *, *, 1, *, * \rangle \rightarrow \langle *, 5, 1, *, * \rangle \rightarrow \langle *, 5, 1, *, 3 \rangle \rightarrow \langle *, 5, 1, 4, 3 \rangle \rightarrow \langle 2, 5, 1, 4, 3 \rangle$$

この割り当て問題はひとつの事柄を示唆している．このように業者数と仕事数が同じ場合．ある業者が値上げをしても割り当てに変化が起こらないことである．さらには，談合して各業者が一斉に値上げをしても答は同じである．つまり，仕事数よりも多くの業者に入札させないとこのことは解決できない．そうするとコスト行列は正方行列にはならないが，その場合はダミーの仕事を増やして正方行列にする必要がある．