# クーポンコレクター問題と第2種スターリング数

古典的なクーポンコレクター問題はそれが単純なモデルで表されるため，確率論やアルゴリズム論にしばしば登場する．この問題の背景にある第 2 種スターリング数との関係について調べた．

まず，最も簡単な 2 種類のクーポンコレクター問題を解いてみよう．

**問 1**　硬貨を投げて表裏が出そろう回数の期待値を求めよ．

**解**　$n$ 回目に初めて表が出そろう場合は，$\underbrace{\text{表表表}\ldots\text{表}}_{n-1\text{ 回}}$裏 と $\underbrace{\text{裏裏裏}\ldots\text{裏}}_{n-1\text{ 回}}$表 の 2 通りであるから，その確率は，

$$\frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \qquad (n \geqq 2)$$

よって，求める期待値は，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} n \cdot \frac{1}{2^{n-1}} &= \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \cdots \\
&= \frac{2}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \cdots \\
&\qquad\quad + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots \\
&\qquad\qquad\quad + \frac{1}{2^3} + \cdots \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + \cdots \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}} \cdots \\
&\qquad \mapsto \text{ここから先，等比数列}\left(\text{初項}\frac{1}{2}\text{，公比}\frac{1}{2}\right) \\
&= 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} \\
&= 3\ (\text{回}) \qquad\qquad \cdots (Ans.)
\end{aligned}$$

ここでは,

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} k r^{k-1} = \frac{1}{(1-r)^2}} \tag{1}$$

または

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} k r^{k} = \frac{r}{(1-r)^2}} \tag{2}$$

などの公式を用いてもよい．

次に 3 種類のクーポンコレクター問題を解いてみよう．

**問 2**　1〜3 の目があるサイコロを投げて（このようなサイコロは立方体の各面に 2 つずつ同じ数字をかくことによって実現できる），目が出そろう回数の期待値を求めよ．

**解**　$n$ 回目に初めて 3 種類のが出そろう場合について調べると，たとえば最後に 3 が出る場合は,

$$\overbrace{1222\dots12}^{\substack{(1\text{ と }2\text{ ばかり})\\ n-1\text{ 回}}}3$$

というように考えることができる．$n-1$ 回を 1 と 2 の両方を用いてならべる順列の場合の数は,

$$2^{n-1}-2\,(\text{通り})$$

つまり，1 ばかり，あるいは 2 ばかりを除いた場合の数である．よって，$n$ 回目にちょうど 3 種類が出そろう確率は,

$$\frac{(2^{n-1}-2)\times 3}{3^n}=\frac{2^{n-1}-2}{3^{n-1}}$$

よって，求める期待値 $E$ は,

$$E=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n(2^{n-1}-2)}{3^{n-1}}$$

$n=3$ は $n=2$ としても分子が 0 になるので，結果は変わらないが，$n=1$ とすることはできない．さて計算を続けると，(1),(2) を用いて,

$$\begin{aligned}
E&=\sum_{n=2}^{\infty}n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-2\sum_{n=2}^{\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\\
&=\frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2}-1-2\left\{\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}-1\right\}\\
&=9-1-2\left(\frac{9}{4}-1\right)\\
&=8-\frac{5}{2}\\
&=\frac{11}{2}\,(\text{回})\qquad\qquad\cdots(Ans.)
\end{aligned}$$

4 種類のクーポンコレクター問題を解く前に準備として，次の問題を解いておこう．

**問 3**　$n$ 個ならべて 1〜3 を網羅する順列を求めよ．

**解**

$$3^n-{}_3\mathrm{C}_2 2^n+3=3^n-3\cdot 2^n+3 \tag{3}$$

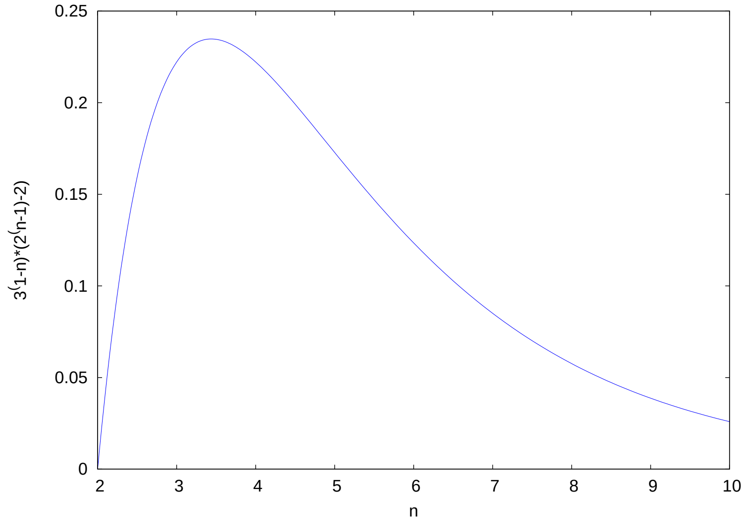


図 1

この答の $n$ に最初のいくつかの値を代入してを調べてみると，

$n=4$ のとき，

$$3^4-3\cdot 2^4+3=81-48+3=36$$

$n=3$ のとき，

$$3^3-3\cdot 2^3+3=27-24+3=6$$

$n=2$ のとき，

$$3^2-3\cdot 2^2+3=9-6+3=0$$

$n=1$ のとき，

$$3-3\cdot 2+3=0$$

$n=0$ のとき，

$$1-3+3=1$$

よって，(3) は $n\geqq 1$ について成り立つ．

以後頻出するので，次の公式を確認しておく．

$$\boxed{\sum_{k=2}^{\infty}kr^{k-1}=\frac{1}{(1-r)^2}-1} \tag{4}$$

これは公式 (1) の $k$ の範囲が変っただけである．(3) でわかるように $k=1$ の場合（上の問題では $n=0$ に相当する）のみあてはまらないからである．

**問** 4　1〜4 の目がふってある正 4 面体のサイコロがある．このサイコロを振って，全ての目が出そろうまでのサイコロを振った回数の期待値を求めよ．

**解**　求める期待値 E は,

$$\begin{aligned}E &= \sum_{n=4}^{\infty} \frac{n(3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}+3)\times 4}{4^n}\\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(3^{n-1}-3\cdot 2^{n-1}+3)}{4^{n-1}}\\ &= \sum_{n=2}^{\infty} n\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} - 3\sum_{n=2}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 3\sum_{n=2}^{\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\\ &= \frac{1}{(1-\frac{3}{4})^2} - 1 - 3\left\{\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - 1\right\} + 3\left\{\frac{1}{(1-\frac{1}{4})^2} - 1\right\}\\ &= 16 - 1 - 3\times(4-1) + 3\left(\frac{16}{9} - 1\right)\\ &= \frac{25}{3} \cdots (Ans.)\end{aligned}$$

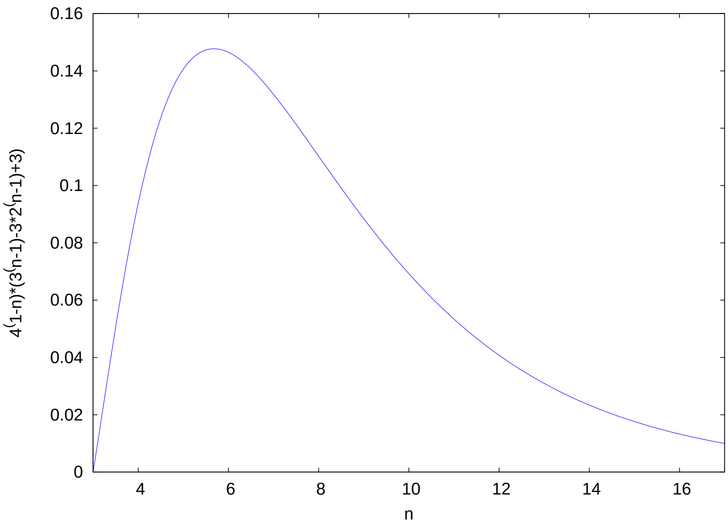


図 2

$n$ 種類の要素全てが出そろうまでの試行の回数の期待値を求めるには，最後の 1 回前までに $n-1$ 種類で網羅されてなければならない．この順列について調べてみよう．

ここに $n$ 種類のものを網羅して $r$ 個並べる順列をクーポン順列と呼び,

$${}_n\mathrm{Q}_r$$

と表すことにする．クーポンは英語で Coupon であるが，C は Combination ですでに使われているので Q を使うことにした．クーポンをキューポンのように発音するネイティブも多いので適当であろう．この記号は汎用のものではない．また後ほど登場する第 2 種スターリング数との兼ね合いを考えると，上述の $n$ と $r$ については逆にするか，あるいは $Q(r,n)$ としたほうがよいのかもしれない．ここでは重複順列の ${}_n\Pi_r$ にならって，そうしたわけである．

**問 5**　${}_1\mathrm{Q}_n$〜${}_5\mathrm{Q}_n$ を求めよ．

**解**　${}_2\mathrm{Q}_n, {}_3\mathrm{Q}_n$ については，すでに前問までに解いているが，まとめておくと，

$$
\begin{aligned}
{}_1\mathrm{Q}_n &= 1 \\
{}_2\mathrm{Q}_n &= 2^n - {}_1\mathrm{Q}_n \cdot {}_2\mathrm{C}_1 = 2^n - 2 \\
{}_3\mathrm{Q}_n &= 3^n - {}_2\mathrm{Q}_n \cdot {}_3\mathrm{C}_2 \\
&\quad - {}_1\mathrm{Q}_n \cdot {}_3\mathrm{C}_1 \\
&= 3^n - (2^n - 2) \times 3 - 3 \\
&= 3^n - 3 \cdot 2^n + 3 \\
{}_4\mathrm{Q}_n &= 4^n - {}_3\mathrm{Q}_n \cdot {}_4\mathrm{C}_3 \\
&\quad - {}_2\mathrm{Q}_n \cdot {}_4\mathrm{C}_2 \\
&\quad - {}_1\mathrm{Q}_n \cdot {}_4\mathrm{C}_1 \\
&= 4^n - (3^n - 3 \cdot 2^n + 3) \times 4 \\
&\quad - (2^n - 2) \times 6 \\
&\quad - 4 \\
&= 4^n - 4 \cdot 3^n + 12 \cdot 2^n - 12 \\
&\qquad\qquad - 6 \cdot 2^n + 12 \\
&\qquad\qquad\qquad - 4 \\
&= 4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4 \\
{}_5\mathrm{Q}_n &= 5^n - {}_4\mathrm{Q}_n \cdot {}_5\mathrm{C}_4 \\
&\quad - {}_3\mathrm{Q}_n \cdot {}_5\mathrm{C}_3 \\
&\quad - {}_2\mathrm{Q}_n \cdot {}_5\mathrm{C}_2 \\
&\quad - {}_1\mathrm{Q}_n \cdot {}_5\mathrm{C}_1 \\
&= 5^n - (4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4) \times 5 \\
&\quad - (3^n - 3 \cdot 2^n + 3) \times 10 \\
&\quad - (2^n - 2) \times 10 \\
&\quad - 5 \\
&= 5^n - 5 \cdot 4^n + 20 \cdot 3^n - 30 \cdot 2^n + 20 \\
&\qquad\qquad - 10 \cdot 3^n + 30 \cdot 2^n - 30 \\
&\qquad\qquad\qquad - 10 \cdot 2^n + 20 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - 5 \\
&= 5^n - 5 \cdot 4^n + 10 \cdot 3^n - 10 \cdot 2^n + 5
\end{aligned}
$$

2 項係数がきれいに並んでいるのが観察できる．これらの結果は $n \geqq 1$ について成り立つ．$n = 0$ で成り立たせるためには，${}_5\mathrm{Q}_n$ の場合で示すと，

$$ {}_5\mathrm{Q}_n = 5^n - 5 \cdot 4^n + 10 \cdot 3^n - 10 \cdot 2^n + 5 - 1 \cdot 0^n $$

という様にあえて表し，さらに，

$$ 0^0 = 1 $$

と定義することにより，成り立たせることができる．このことは次の一般化においても有効であるが，あくまで利便性のみの話である．

一般に

$$\boxed{{}_n\mathrm{Q}_r = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\ {}_n\mathrm{C}_k k^r} \tag{5}$$

であることが，容易に想像できる．この式には $(-1)^0 = 1$ という，これもやや危うい定義を含んでいるので，気になる場合は $n-k$ のかわりに $n-k+2$ としておいたほうがよいであろう．この公式の証明は可能であると思われるが，文字と $\sum$ のオンパレードで大変繁雑になることが予想されるのでここでは割愛する．ただ (6) は至極あたりまえのことを言っているに過ぎないので，直感でも理解できないことはない．

さて，ここでやや横道にそれることになるが，確率について考えてみたい．

**問** 6　袋に入った 5 種類の球があり，1 回の試行で 1 つの取り出した球の種類を調べて袋にまた戻す．$n$ 回の試行までに 5 種類の球すべてを取り出す確率を求めよ．

**解**　(5) より，求める確率は，

$$\frac{5^n - 5\cdot 4^n + 10\cdot 3^n - 10\cdot 2^n + 5}{5^n} \tag{6}$$

この確率は $n$ について当然単調増加になるはずで，しかも 1 を超えることはないのだが，式の上からそれを実感することは難しい．そこで計算によりそのことを確かめてみたい．

(7) で求めた確率を $P(n)$ とすると，

$$\begin{aligned}
&P(n) - P(n-1)\\
=&\frac{1}{5^n}(5^n - 5\cdot 4^n + 10\cdot 3^n - 10\cdot 2^n + 5 - 5^n + 25\cdot 4^{n-1} - 50\cdot 3^{n-1} + 50\cdot 2^{n-1} - 25)\\
=&\frac{1}{5^n}(5\cdot 4^{n-1} - 20\cdot 3^{n-1} + 30\cdot 2^{n-1} - 20)\\
=&\frac{1}{5^{n-1}}(\cdot 4^{n-1} - 4\cdot 3^{n-1} + 6\cdot 2^{n-1} - 4)\\
=&\frac{1}{5^{n-1}}\cdot {}_4\mathrm{Q}_{n-1}
\end{aligned} \tag{7}$$

証明はしていないが，当然のことながら $n \geqq 5$ において

$${}_4\mathrm{Q}_{n-1} > 0$$

であるから，

$$\begin{aligned}
P(n) - P(n-1) &> 0\\
\therefore P(n) &> P(n-1)
\end{aligned}$$

よって $P(n)$ は単調増加であり，このことも当然であるが，

$$\lim_{n\to\infty} P(n) = 1$$

であるので，$P(n)$ が 1 を超えることはない．

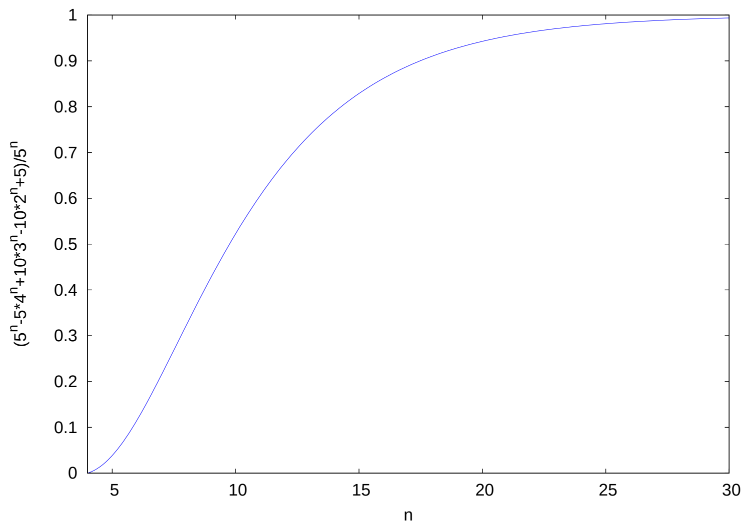


図 3

**問 7**　前問（**問 6**）の試行で，ちょうど $n$ 回の試行で 5 種類の球すべてを取り出す確率を求めよ．

**解**　求める確率は，

$$\frac{{}_4\mathrm{Q}_{n-1} \times 5}{5^n} = \frac{{}_4\mathrm{Q}_{n-1}}{5^{n-1}} = \frac{4^{n-1} - 4 \cdot 3^{n-1} + 6 \cdot 2^{n-1} - 4}{5^{n-1}} \tag{8}$$

この確率は (8) の $P(n) - P(n-1)$ に等しいことは，当然といえば当然である．さてこの確率の最大値はどのようなものであろうか．

(9) で求めた確率を $R(n)$ とすると，

$$\begin{aligned}
&R(n+1) - R(n)\\
=&\frac{1}{5^n}(4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4 - 5 \cdot 4^{n-1} + 20 \cdot 3^{n-1} - 30 \cdot 2^{n-1} + 20)\\
=&\frac{1}{5^n}(-4^{n-1} + 8 \cdot 3^{n-1} - 18 \cdot 2^{n-1} + 16)
\end{aligned}$$

つまり，不等式

$$-4^{n-1} + 8 \cdot 3^{n-1} - 18 \cdot 2^{n-1} + 16 > 0 \tag{9}$$

を解けばよいのだが，残念ながらきれいには解けない．(10) の左辺は

$$
\begin{aligned}
&n = 2 \text{ のとき } 0 \\
&n = 3 \text{ のとき } 0 \\
&n = 4 \text{ のとき } 24 \\
&n = 5 \text{ のとき } 120 \\
&n = 6 \text{ のとき } 360 \\
&n = 7 \text{ のとき } 600 \\
&n = 8 \text{ のとき } -1176
\end{aligned}
$$

つまり，$n = 8$ のとき $R(n)$ は最大となる．結局 (9) に数値を代入していったのとさして労力は変らなかったわけである．その最大値は，

$$R(8) = \frac{4^7 - 4 \cdot 3^7 + 6 \cdot 2^7 - 4}{5^7} = \frac{8400}{5^7} = \frac{336}{5^5} = \frac{336}{3125}$$

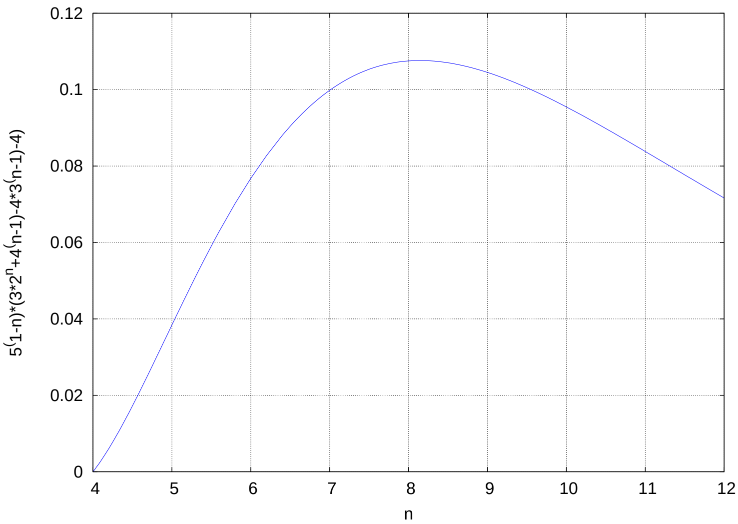


図 4

だいぶ横道にそれたが，話をもどして第二種スターリング数に登場願おう．定義は次のようなものである．

> 大きさ $n$ の集合を，その和集合が全体集合となる $k$ 個の互いに素な空でない部分集合に分割する方法の個数を第二種スターリング数とよび，$S(n,k)$ で表す．

わかりにくいが，要するに $n$ 種類のものを $k$ 個のグループに分ける方法ということである．ただし，空のグループがあってはならないということである．この $k$ 個のグループは区別しておらず，つまりグループ名はつけていない．これを区別すれば結局前出の ${}_k\mathrm{Q}_n$ に相当するわけである．つまり

$$\boxed{{}_k\mathrm{Q}_n = k!S(n,k)} \tag{10}$$

である．スターリング数の性質として次の二つの重要な定理が挙げられる．

$$\boxed{S(n,1)=S(n,n)=1 \qquad (1 \leqq n)} \tag{11}$$

この定理は証明の必要もないであろう．$n$ 個のものを 1 つのグループに分ける方法も，$n$ 個のグループに分ける方法も 1 通りしかないのは自明である．

$$\boxed{S(n,k)=S(n-1,k-1)+kS(n-1,k) \qquad (1<k<n)} \tag{12}$$

今 $n-1$ 冊の本が $k$ 個の本棚に分けてあるとしよう．もちろん空の本棚はなく，$n-1 \geqq k$ である．この状態で $S(n-1,k)$ 通りの分け方がある．本を 1 冊増やしたときに，本の分け方は何通りであろうか．まず増やす 1 冊を $k$ 個のどれかの本棚に入れる場合が考えられる．これが右辺の $kS(n-1,k)$ である．これでは最後に加えた 1 冊がそれのみで入っている本棚が存在しない．これを数えるには本棚が 1 つ少ない状態を考えて，新たに本棚を増やすことにしなければならない．これが $S(n-1,k-1)$ である．この状態が意味あるものにするためには $k \geqq 2$ が必要である．よってこの漸化式が証明できた．

この 2 つの定理を使って第 2 種スターリング数を求めることができる．ちょうど 2 項係数をパスカルの 3 角形を使って求めるのに似ている．

$$\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 7 \quad 6 \quad 1 \\
1 \quad 15 \quad 25 \quad 10 \quad 1 \\
1 \quad 31 \quad 90 \quad 65 \quad 15 \quad 1 \\
1 \quad 63 \quad 301 \quad 350 \quad 140 \quad 21 \quad 1 \\
1 \quad 27 \quad 966 \quad 1701 \quad 1050 \quad 266 \quad 28 \quad 1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

$S(n,k)$ において，上の 3 角形の行数が $n$，列数が $k$ である．パスカルの 3 角形では上の行の隣り合う 2 つの数を単純にたすだけであるが，第 2 種スターリング数では右側の数字は列数倍，つまり $k$ 倍してたさなければならない．また，パスカルの 3 角形では最初の行は ${}_0\mathrm{C}_0$ を表すが，スターリング数では最初は $S(1,1)$ である．

**問** 8　第 2 種スターリング数の 3 角形を用いて ${}_5\mathrm{Q}_7$ を求めよ．

**解**

$${}_5\mathrm{Q}_7 = 5!S(7,5) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1050 = 120 \cdot 140 = 16800 \cdots (Ans.)$$

さて (5) で求めた式で検算をしてみよう．

$$\begin{aligned}
&5^7 - 5 \cdot 4^7 + 10 \cdot 3^7 - 10 \cdot 2^7 + 5 \\
=&78125 - 5 \cdot 16384 + 10 \cdot 2187 - 10 \cdot 128 + 5 \\
=&78125 - 81920 + 21870 - 1280 + 5 \\
=&16800
\end{aligned}$$

3 角形をあらかじめ作っておかなくてはならないことを差し引いても，どちらが計算が楽か明白であろう．しかしこれは具体的な数字が与えられた場合のことで，一般の $n, k$ に通用するものではない．そこで，(6) と (11) から第 2 種スターリング数の一般項を求めてみよう．

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\ {}_k\mathrm{Q}_n \qquad \text{より}$$

$$\boxed{S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\ {}_k\mathrm{C}_i i^r} \tag{13}$$

ここにきて，このレポート中の変数の使い方が一環していないことを反省する．

最後に幾何分布に言及して終わりにしたい．クーポンコレクター問題の期待値については幾何分布によって簡単に求まることがわかっている．それは次のような方法である．

今 $n$ 種類のクーポンがあるとする．このうちすでに $k$ 種類のクーポンが集まっていて次の 1 種類が出るまでの試行回数の期待値を求めるわけである．そしてその総和が答である．準備として次の定理を証明しておこう．

確率 $p$ で起こる事象がある．この事象がはじめて起こるまでの試行回数の期待値 $E$ は,

$$\boxed{E = \frac{1}{p}} \tag{14}$$

である．

[証明]

$$\begin{aligned} E &= p + 2(1-p)p + 3(1-p)^2p + \cdots \\ &= p\left\{1 + 2(1-p) + 3(1-p)^2 + \cdots\right\} \end{aligned}$$

公式 (2) より

$$\begin{aligned} E &= p\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1} \\ &= p \times \frac{1}{p^2} \\ &= \frac{1}{p} \end{aligned}$$

(15) も至極あたりまえのことを言っている．たとえば $\dfrac{1}{10}$ の確率で起こる事象がはじめて起こる回数の平均は 10 回である．いまクーポンが $k$ 種類集まった状態で $k+1$ 枚 出るまでかかる回数の期待値を $E(k)$ とすると，(15) から,

$$E(k) = \frac{n}{n-k}$$

$n$ 種類全部のクーポンが集まるまでの回数の期待値は,

$$\sum_{k=0}^{n-1}E(k) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{n}{n-k} = n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots \quad + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1\right)$$

調和数列の和は残念ながらこれ以上簡単にはならない．つまり同じ確率で出る $n$ 種類のクーポンを全て集めるまでの回数の期待値 $E_q(n)$ は

$$\boxed{E_q(n) = n\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)} \tag{15}$$

この方法は最初のやり方，つまりクーポン順列を用いるよりずっと簡便である．たとえば 4 種類のクーポンを集めるための試行回数の期待値 $E_q(4)$ は

$$\begin{aligned} E_q(4) =& 4\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) \\ =& 4\times\frac{12+6+4+3}{12} \\ =& \frac{25}{3} \end{aligned}$$

**問** 4 の**解**と比べれば一目瞭然である．裏をかえせば，クーポン順列から (16) を導けるはずである．試みよう．

$$\begin{aligned} & E_q(n) \\ =& \sum_{i=2}^{\infty}\frac{i \times_{n-1} \mathrm{Q}_{i-1}}{n^i} \\ =& \sum_{i=2}^{\infty}\frac{i\times\left\{(n-1)^{i-1}-(n-1)(n-2)^{i-1}+\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}(n-3)^{i-1}\cdots\right)\right\}}{n^{i-1}} \\ =& \sum_{i=2}^{\infty} i\left(\frac{n-1}{n}\right)^{i-1} - (n-1)\sum_{i=2}^{\infty} i\left(\frac{n-2}{n}\right)^{i-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\sum_{i=2}^{\infty} i\left(\frac{n-3}{n}\right)^{i-1}\cdots \end{aligned}$$

公式 (4) を用いて

$$\begin{aligned} =& (n^2-1)-(n-1)\left(\frac{n^2}{2^2}-1\right)+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\left(\frac{n^2}{3^2}-1\right)+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot 2}\left(\frac{n^2}{4^2}-1\right)\cdots \\ =& n\underbrace{\left({}_n\mathrm{C}_1-\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{2}+\frac{{}_n\mathrm{C}_3}{3}-\frac{{}_n\mathrm{C}_4}{4}+\cdots\right)}_{n-1\text{ 項}}-\underbrace{\left({}_{n-1}\mathrm{C}_0 -_{n-1} \mathrm{C}_1 +_{n-1} \mathrm{C}_2 -_{n-1} \mathrm{C}_3+\cdots\right)}_{n-1\text{ 項}} \\ =& n\underbrace{\left({}_n\mathrm{C}_1-\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{2}+\frac{{}_n\mathrm{C}_3}{3}-\frac{{}_n\mathrm{C}_4}{4}+\cdots\right)}_{n-1\text{ 項}}-(-1)^n \\ =& n\underbrace{\left({}_n\mathrm{C}_1-\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{2}+\frac{{}_n\mathrm{C}_3}{3}-\frac{{}_n\mathrm{C}_4}{4}+\cdots-\frac{(-1)^n\ {}_n\mathrm{C}_n}{n}\right)}_{n\text{ 項}} \end{aligned}$$

つまり，

$$\boxed{{}_n\mathrm{C}_1-\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{2}+\frac{{}_n\mathrm{C}_3}{3}-\frac{{}_n\mathrm{C}_4}{4}+\cdots-\frac{(-1)^n\ {}_n\mathrm{C}_n}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}} \tag{16}$$

となれば証明が終了なのだが，この等式は見たことがないので，数学的帰納法で証明してみよう．(17) は $n=1$ で成り立つのは明らかである．$n=k$ で成り立つと仮定したときに $n=k+1$ の場合の (17) の左辺と

の差をとってみると，

$$
\begin{aligned}
&(k+1-k)-\frac{1}{2}\left\{\frac{(k+1)k}{2}-\frac{k(k-1)}{2}\right\}+\frac{1}{3}\left\{\frac{(k+1)k(k-1)}{3\cdot 2}-\frac{k(k-1)(k-2)}{3\cdot 2}\right\}\cdots\\
=&1-\frac{k}{2}+\frac{k(k-1)}{3\cdot 2}-\cdots-(-1)^k+(-1)^k\frac{{}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}}{k+1}\\
=&\frac{1}{k+1}\left\{{}_{k+1}\mathrm{C}_1-{}_{k+1}\mathrm{C}_2+{}_{k+1}\mathrm{C}_3-\cdots-(-1)^k\cdot{}_{k+1}\mathrm{C}_k\right\}+(-1)^k\frac{1}{k+1}
\end{aligned}
$$

2 項定理を適用するには最初と最後の項が不足しているので無理やり付け加えて同じものを引くと，

$$
\begin{aligned}
=&\frac{1}{k+1}\left\{-{}_{k+1}\mathrm{C}_0+{}_{k+1}\mathrm{C}_1-{}_{k+1}\mathrm{C}_2+\cdots+(-1)^k\cdot{}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}+1-(-1)^k\cdot{}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}\right\}+(-1)^k\frac{1}{k+1}\\
=&\frac{1}{k+1}\left\{-(1-1)^k+1-(-1)^k\cdot{}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}\right\}+(-1)^k\frac{1}{k+1}\\
=&\frac{1}{k+1}\left\{1-(-1)^k\right\}+(-1)^k\frac{1}{k+1}\\
=&\frac{1}{k+1}
\end{aligned}
$$

となり，(17) は全ての自然数 $n$ で成り立つことが証明できた．つまり (16) はクーポン順列あるいは第 2 種スターリング数からも成り立つことが証明できたわけである．

## 参考文献


[1] 奥村晴彦『改訂第 4 版 LaTeX 2ε 美文書作成入門』（技術評論社，2007 年）

[2] 小林道正，小林研『LaTeX で数学を』（朝倉書店，2001 年）春日井市図書館蔵

[3] 生田誠三『LaTeX 2ε 文典』（朝倉書店，2000 年）春日井市図書館蔵

[4] 「第 2 種スターリング数」<http://www002.upp.so-net.ne.jp/hadwiger/stnum.html>

[5] 水の流れ「美しい数学の話」<http://www2.ocn.ne.jp/~mizuryu/utukusii.html>

[6] 朝間広海，高橋秀剛，中田寿夫「当たりのあるクーポン集めの問題について」 <http://www.mickey.ai.kyutech.ac.jp/~ipsj/event/sympo2005/papers/A-8-4.pdf>

[7] 熊澤吉起「TeX」<http://www.biwako.shiga-u.ac.jp/sensei/kumazawa/texindex3.html#etc>

[8] 中川義行「Maxima 入門ノート 1.2.1」<http://www.eonet.ne.jp/~kyo-ju/maxima.pdf>

[9] 戸村佳代「参考文献の書き方」<http://www.isc.meiji.ac.jp/~tomura/references_guide.html>