

サイクロイドの曲率

問題 1 サイクロイドの曲率を求めよ。

[解] サイクロイドを

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

とすると,

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 - \cos t \\ \dot{y} = \sin t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = \sin t \\ \ddot{y} = \cos t \end{cases}$$

曲率を κ とすると,

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1 - \cos t}{\{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t\}^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1 - \cos t}{(2 - 2\cos t)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2 - 2\cos t}} \end{aligned}$$

サイクロイドの両端は曲率半径は 0 となる。図のように二つのサイクロイドを上下くっつけたような図形を作る。そうすると、意外にも両端はとがっているのである。しかもその点は接線が引ける。つまり、とがっているけど滑らかなのである。不思議な図形である。

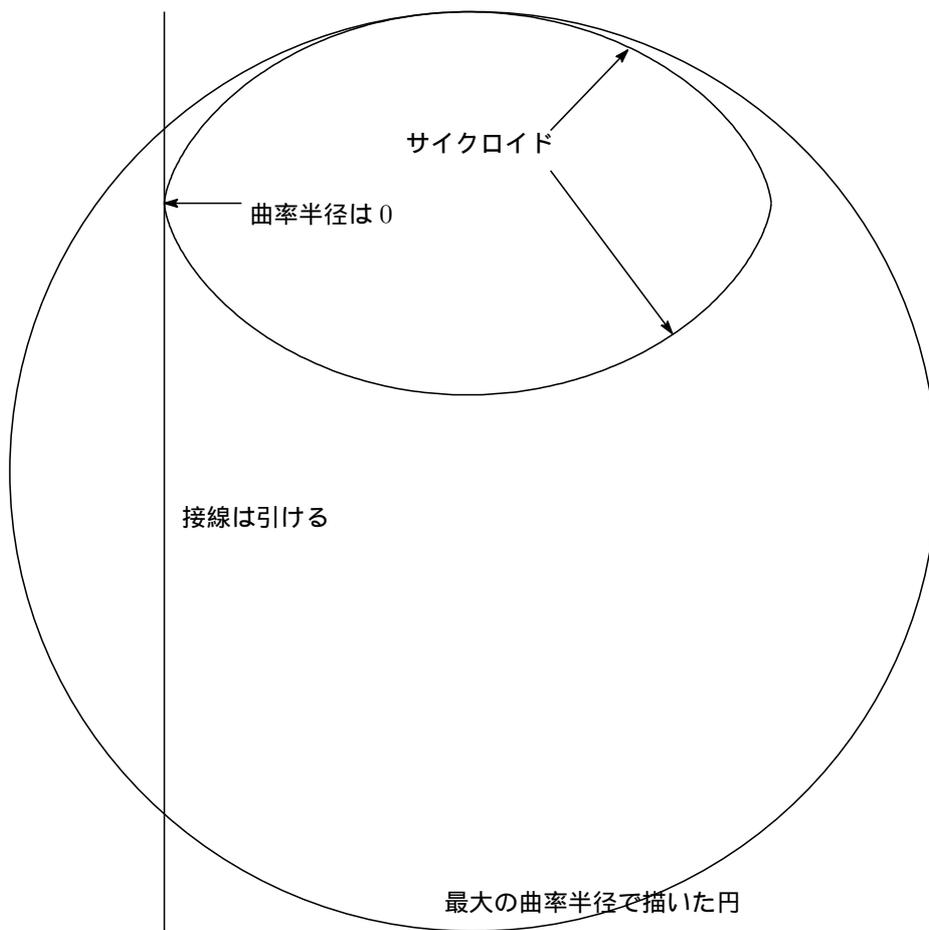


図 1