完全微分形微分方程式

Exact Total Defferential Equation

積分を 2 回行なうことによって解が得られる微分方程式について考える．まず 2 変数関数の全微分を思い出す．2 変数関数の全微分は，

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

で与えられる．よってもし 2 つの偏微分 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ がわかれば，全微分が求まる．逆に，関数の全微分がわかると，その関数を任意の定数の範囲で決めることができる．

定義　1 階の全微分方程式

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

の左辺がある関数の全微分に等しいならば，この方程式の一般解は

$$u(x,y) = C$$

で与えられ，このような方程式を**完全微分形**(exact) という．

定理　$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ が完全微分形であるための必要十分条件は，

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

である．[証明略]

問　$2xydx + (-x^2 + y^2 + 1)dy = 0$ を解け．

解　両辺を y^2 で割ると，

$$\frac{2x}{y}dx + \left(-\frac{x^2}{y^2} + 1 + \frac{1}{y^2}\right)dy = 0$$

$$\int \frac{2x}{y}dx = \frac{x^2}{y} + c(y)$$

$$\int \left(-\frac{x^2}{y^2} + 1 + \frac{1}{y^2}\right)dy = \frac{x^2}{y} + y - \frac{1}{y}$$

つまり，

$$c(y) = y - \frac{1}{y}$$

よって，この方程式の一般解は

$$\frac{x^2}{y} + y - \frac{1}{y} = C$$

参考文献

[1] 東京大学応用物理学教室編『微分方程式 [東京大学基礎工学 2]』（東京大学出版会，1973 年）

[2] 横田壽「応用数学入門」 <http://next1.cc.it-hiroshima.ac.jp/MULTIMEDIA/diff.html>