階乗の末尾の 0 の個数

問題　次の問題に答えよ．

(1)　2009!の末尾にはいくつの 0 が続くか．

(2)　$x!$ の末尾には 2009 個の 0 が続く．x はいくつからいくつまでの数か．

解

(1)　0 の個数は因数 5 の数に等しい．

$$\begin{aligned} 2009 \div 5 &= 401 \ldots 4 \\ 401 \div 5 &= 80 \ldots 1 \\ 80 \div 5 &= 16 \\ 16 \div 5 &= 3 \ldots 1 \end{aligned}$$

$$401 + 80 + 16 + 3 = \underline{500 \cdots (Ans.)}$$

[評]　500 という答えが美しい．この値は 2005 年から 2009 年の 5 年間だけである．wxMaxima により計算した結果を下に示す．最後の 0 でない桁がわかるようにしてある．

```
2009!/10^490;
```

$$17365076492061180042358415735 6[5216 digits]26617939291253243904000000000$$

(2)　$5^5 = 3125$ の階乗を考えると，約数 5 の個数は，

$$1 + 5 + 25 + 125 + 625 = \frac{5^5 - 1}{5 - 1} = \frac{3124}{4} = 781$$

さらにその上の，$5^6 = 15625$ の階乗を考えると，

$$1 + 5 + 25 + 125 + 625 + 3125 = 781 + 3125 = 3906(\text{個})$$

の 5 の約数をもつ．つまり

$$3125 < x < 15625$$

である．これを 5 進数表示にするとこうなる．$10^5 = 100000$ の階乗を考えると，約数 10 の個数は，

$$1 + 10 + 100 + 1000 + 10000 = 11111$$

さらにその上の，$10^6 = 1000000$ の階乗を考えると，

$$1 + 10 + 100 + 1000 + 10000 + 10000 + 100000 = 111111(\text{個})$$

の 10 の約数をもつ．つまり

$$100000 < x < 1000000$$

である．(1) の解の余りの数を見てもわかるように，

$$(2009)_{10} = (31014)_5$$

普通低い進数表示に直すには，大きい桁から割っていくことが多い，たとえば 5 進数に直す場合であると，$\div 625, \div 125 \cdots$ という具合であるが，5 進数であれば $\div 5$ を何回も行ってその余りを記録していくほうが実際は計算間違いが少ないと思われる．しかし，説明するに困難であるためこの方法は普通用いられないと思われる．

ここから各桁が 1 の整数の整数倍を引いていけばよいわけである．すべて 5 進法による計算であるから電卓には頼らないほうがよい．Winsows に付属している関数電卓も 2,4,8,16 進法には対応しているが 5 進法には対応していない．

$$\begin{aligned}31014 &= 22222 + 3242\\ &= 22222 + 2222 + 1020\\ &= 22222 + 2222 + 444 + 21\\ &= 22222 + 2222 + 444 + 11 + 10\\ &= 22222 + 2222 + 444 + 11 + 4 + 1\end{aligned}$$

$$x = (224141)_5$$

10 進表示になおすと，

$$\begin{aligned}x &= 5^5 \times 2 + 5^4 \times 2 + 5^3 \times 4 + 5^2 + 5 \times 4 + 1\\ &= 3125 \times 2 + 625 \times 2 + 125 \times 4 + 25 + 5 \times 4 + 1\\ &= 8046\end{aligned}$$

と，めでたく解けたように見えるが実は最後の一桁が大変悩ましい．5 進表示の最後の桁を切り捨てた 8045 も切り上げた 8050 も題意を満たさないのである．つまり 8050 が 25 の倍数でもあるため，0 の数が 2008 個から 2010 個までとんでしまうのである．運が悪いといえばそれまでだが，少なくとも 5 回に 1 回は起こることで，数字が大きくなるほど，その確率はわずかずつ上がる．2009 はそういう数字であったわけである．であるからこの問題の答は**「解なし」**である．次に実際の計算結果を示す．

```
8045!/10^2000;
```

$$25692727177894331918161441300[25869 digits]55285066616425142026240000000000$$

```
8050!/10^2000;
```

$$86746110343258661749058290493I[25888 digits]61851319471537389568000000000000$$

参考文献

[1] Steven G. Krantz 著 関沢正躬正訳『問題解決への数学（原題 Techniques of Problem Solving）』（丸善，2001 年）