フェルマー点とシュタイナー点

定理 1 三角形 ABC の外側に三つの正三角形△ ABP，△ BCQ，△ CAR をかくと，その三つの正三角形の外接円は 1 点で交わる．

[証明]

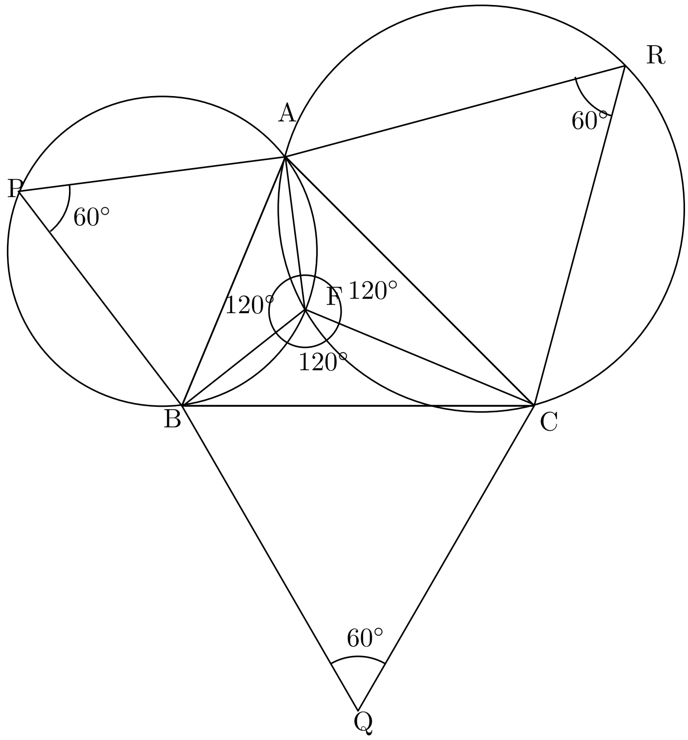

図 1

円に内接する四角形の相対する内角の和は 180 ° なので，

$$\angle AFB = \angle AFC = 120^\circ$$

$$\therefore \angle BFC = 120^\circ$$

よって，四点 BQCF は同一円周上にあり，その円は△ BCQ の外接円にほかならない．よって題意は証明された．

このような任意の三角形の外側にかいた正三角形の外接円の交点を**フェルマー点** (Fermat Point) と呼ぶ．

定理 2 三角形 ABC の外側に三つの正三角形△ ABP，△ BCQ，△ CAR をかくと，直線 AQ,BR,CP の交点はフェルマー点である．

[証明]

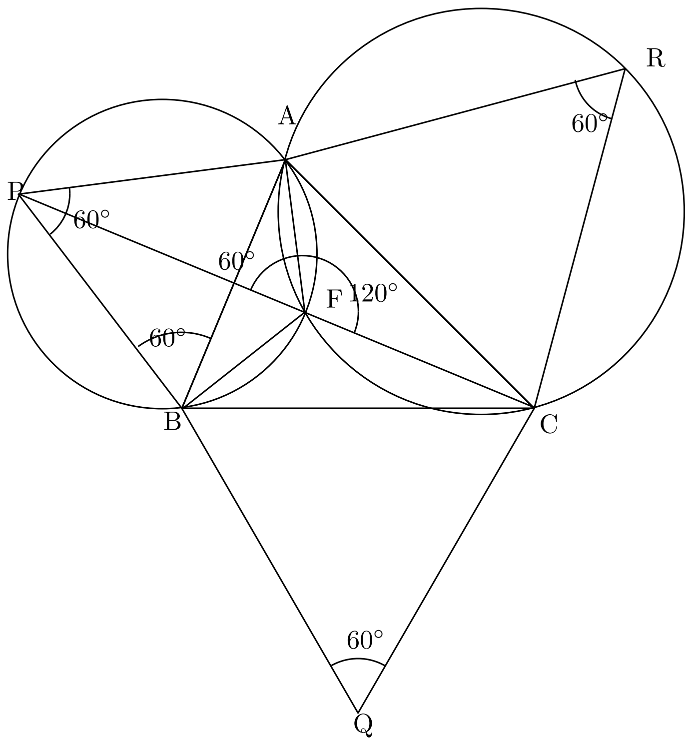

図 2

同一弦に対する円周角は等しいので

$$\angle AFP = \angle ABP = 60^\circ$$

$$\therefore \angle PFC = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$$

つまり，PFC は一直線上にある．AFQ,BFR についても同様のことが言え，題意は証明された．

実際の作図では，外接円の交点を求めるより直線の交点を求めるほうが簡単と思われる．こちらをフェルマー点の定義とするのが一般的である．

定理 3 △ ABC のフェルマー点を F とする．F が△ ABC の内側にあるとき，△ ABC の内部に任意の点 G をとると，

$$AF + BF + CF \leq AG + BG + CG$$

である．

このように 3 点 A,B,C までの距離の和が最小になる点を ABC のシュタイナー点（Steiner Point）と呼ぶ．フェルマー点がシュタイナー点であることをこの定理は言っているのだが，証明は初等幾何学的に行うとやや困難である．

[証明]　点 A を通り AF と垂直な直線 l をかく，同様に点 B を通り BF と垂直な直線 m，点 C を通り CF と垂直な直線 n をかく．l, m の交点を I，m, n の交点を J，n, l の交点を K とする．△ IJK は正三角形である．

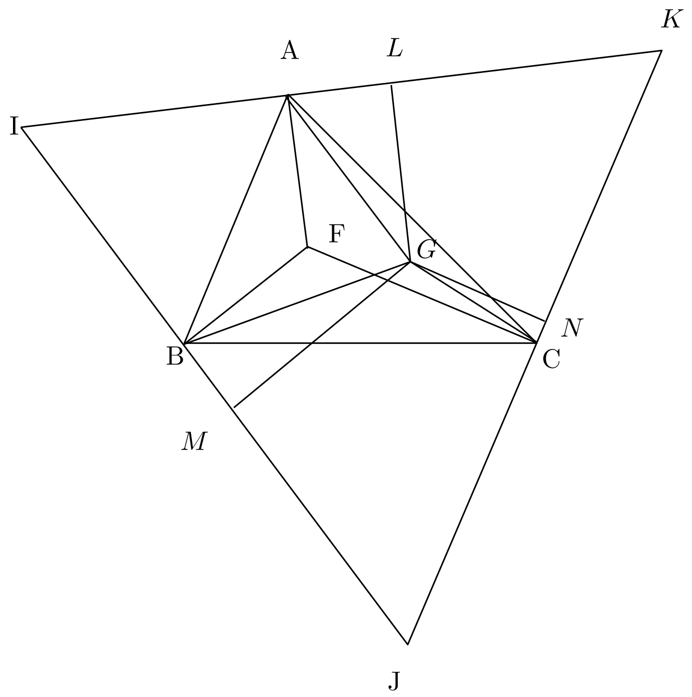

図 3

G から l,m,n におろした垂線の足を L,M,N とする．**補題 1**(後述) より

$$AF + BF + CF = LG + MG + NG \tag{1}$$

LG は G から l 上の点までの最短距離である．m,n についても同様である．よって，

$$LG \leq AG, MG \leq BG, NG \leq CG$$
$$\therefore LG + MG + NG \leq AG + BG + CG \tag{2}$$

(1),(2) より，

$$AF + BF + CF \leq AG + BG + CG$$

[証明終わり]

G が△ ABC の外にあってもこの定理は成り立つ．

しかしながら，このようにフェルマー点がシュタイナー点になるのはフェルマー点 F が△ ABC の内部にあるときである．ではフェルマー点が△ ABC の外にある場合はどのような場合であろうか．それは少し考えるとすぐわかる．図 3 のように∠A,B,C のどれかが 120 ° より大きいときである．この場合シュタイナー点はその 120 ° より大きい内角をもつ頂点である．図 4 では点 B がシュタイナー点である．

補題 1　正三角形 ABC の内部にある任意の点 P から辺 AB, BC, CD へ引いた垂線の足を L, G, M とすると，

$$PL + PM + PN$$

は一定である．

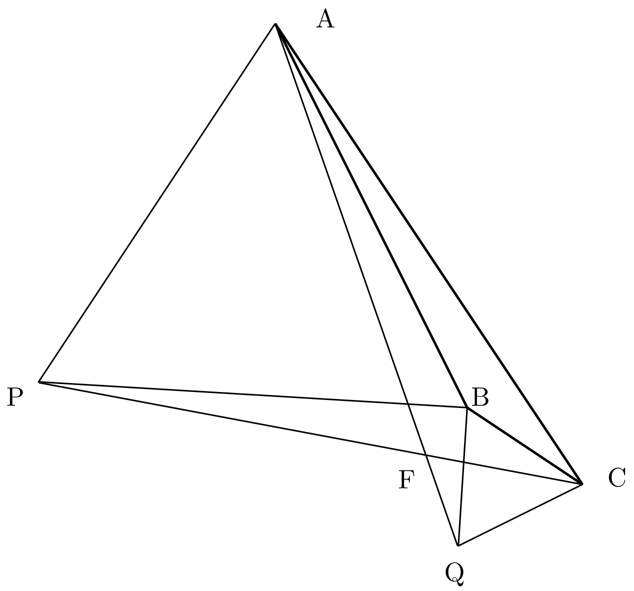

図 4

[証明]　面積を用いて証明する.

$$\begin{aligned}\triangle ABC &= \triangle ABP + \triangle BCP + \triangle CAP \\ &= \frac{1}{2}(AB \cdot PL + BC \cdot PM + CA \cdot PN) \\ &= \frac{AB}{2}(PL + PM + PN)\end{aligned}$$

$\triangle ABC$ の面積も AB の長さも一定なので,

$$PL + PM + PN$$

も一定である.　[証明終わり]

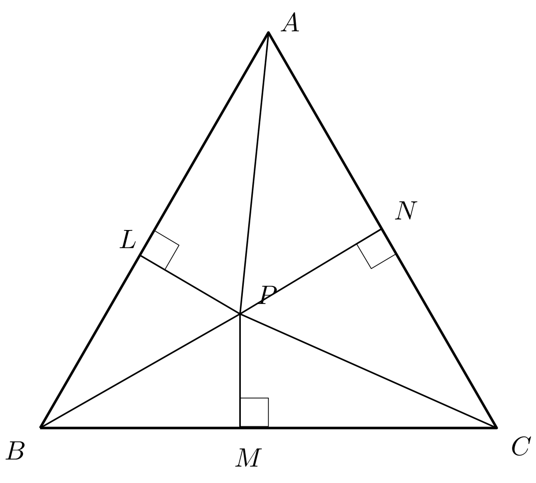

図 5

シュタイナー (Jakob Steiner, 1796-1863)　スイスの数学者．ウッツェンシュトルフに生まれる．14 歳になるまで読み書きを習わず，18 才で初めて学校教育を受ける．ハイデルベルク大学とベルリン大学で学び，1834 年にベルリン大学教授となる．射影幾何の発展に貢献した（シュタイナーの定理，シュタイナー曲面）．ユークリッド幾何の作図に関するポンスレ・シュタイナーの定理，シュタイナーのデルトイド，シュタイナーの三角形などがある．計算が苦手で，代数と解析が嫌いだったと言われている．

参考文献

[1] 「人名検索」<http://www.com.mie-u.ac.jp/~kanie/tosm/humanind/jinmei.htm>