凸 n 角形に内接する $(n-1)$ 角形の面積が最大となるとき

この問題もほぼ自明であるが，証明は困難である．

問題　凸 n 角形 S に内接する $(n-1)$ 角形 T の面積が最大となるとき，T の頂点のうち，S の頂点と共有しているものの個数は $n-1$ または $n-2$ であることを証明せよ．ここで，内接というのは T の全ての頂点が S の周上，つまり辺または頂点の上にあることをさす．

定義 1. 凸多角形 S の隣り合う 3 頂点を頂点とする三角形を S の角（かど）の三角形と呼ぶことにする．

定理 1. 面積が最大となる T が，その頂点の全てを S の頂点と共有している場合，S と T の間にできた三角形は S の角の三角形のうち面積が最小のものである．

［証明］自明

定理 2. 面積が最大となる T のうち，1 個以上の頂点が S の頂点と重ならないものが存在した場合について考える．その頂点が存在する S の辺の両端の頂点は，T の頂点と共有しない．

［証明］(1)S の辺上にあり頂点にはない T の頂点を A とする．A が存在する S の辺の両端の頂点が T の頂点と重なる場合，T は $(n-1)$ 角形ではなく，$(n-2)$ 角形あるいはそれ以下となってしまうので，そもそも題意と矛盾している．
(2) A が存在する S の辺の両端の頂点うち一方のみが T の頂点と重なる場合，そのような（S の頂点と重な

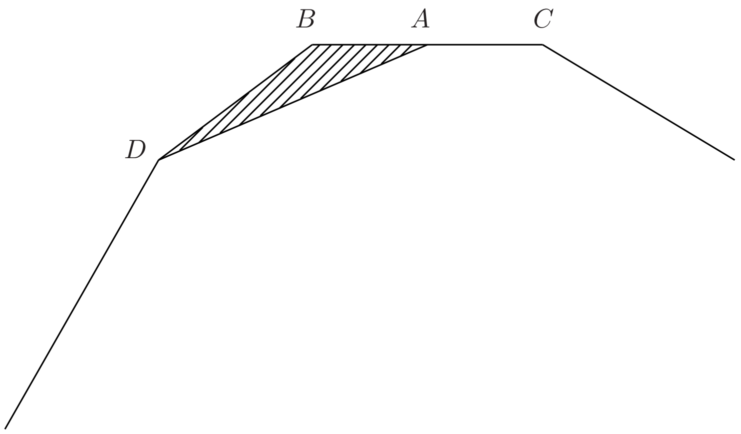

図 1

らない）T の頂点を A とする．A が存在する S の辺を BC とし，C は T と頂点を共有している（図 1）．点 A を B まで移動することにより，さらに面積の大きな T をつくることができる．これは面積が最大とした仮定と矛盾している．よって，このような場合はない．［証明おわり］
図 1 では点 D が頂点を共有しているようにかいたが，そうでない場合でも同様である．

定理 3. 面積が最大となる T のうち $m(< n-1)$ 個の頂点が S の頂点と共有する場合．同じ面積で $m+1$ 個の頂点が S の頂点と共有する T が存在する．

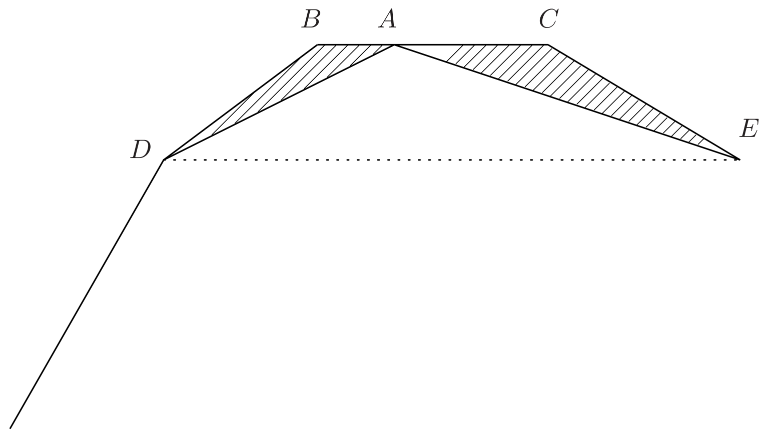

図 2

［証明］このような場合，1 つ以上の T の頂点が S の頂点と重ならないわけであるが，そのような頂点の一つを A とする．それ以外の点も図 2 のように置く．もし $BC \nparallel DE$ であれば A を B または C に移動させてやることにより，もっと面積の大きい T が実現できるので矛盾する．

$$\therefore BC \parallel DE$$

このとき，A を B または C に移動させてやることにより, 同じ面積で $m+1$ 個の頂点が S の頂点と共有する T を作ることができる． ［証明おわり］

ここで，A を B または C に移動させてやることにより，T が $(n-2)$ 角形になってしまう恐れがあるが，それは前定理より否定できる．

この定理から凸 n 角形 S に内接する $(n-1)$ 角形 T の面積が最大となる T の頂点のうち，S の頂点と共有しているものの個数が $n-2$ であることとき，同じ面積でその全ての頂点を S の頂点と共有しているような T がやはり存在することを示している．

さて，それでは共有頂点の個数が $n-2$ 未満の場合があるかどうかを調べなければならない．

定理 4. 凸 n 角形 S に内接する $(n-1)$ 角形 T の面積が最大となるとき，T の頂点のうち，S の頂点と共有しているものの個数が $n-3$ であることはない．

［証明］まず，T の $n-3$ 個の頂点が S の頂点と重なるわけであるから，それ以外の T の頂点は 2 個である．この 2 個の頂点を A, B とすると，A, B は T の中で連続する頂点である．このことから証明しよう．

仮に A, B が離れていたとする．A が存在する S の辺を CD，B が存在する S の辺を EF とすると，A, B が離れているので，D と E は別の点である．定理 2 より C, D, E, F はどれも T の頂点と重ならない．それ以外の S の頂点は全て T の頂点であり，逆に A, B 以外の T の頂点は全て S の頂点となる．つまり S の頂点は

$$(n-3)+4=n+1 \quad (個)$$

となり，S は n 角形であるという前提と矛盾する．よって，A, B が離れている場合はない．

つぎに，A, B が連続していて，なおかつ面積が最大になることはないということを証明しなければならない．そのような場合を図 3 に示す．定理 3 の証明の過程であきらかになったように,

$$CD \parallel GB, DF \parallel AH$$

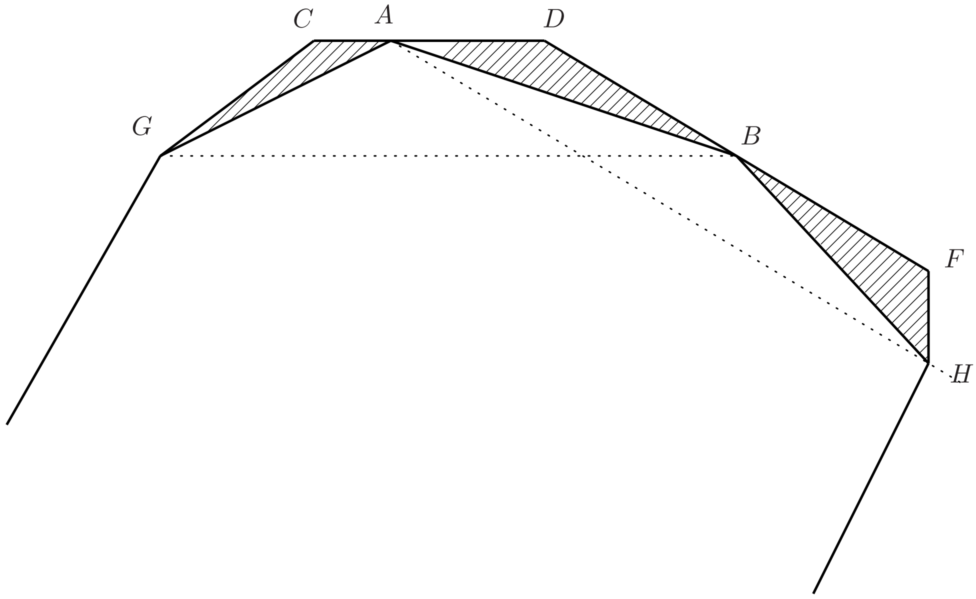

図 3

である．A を D まで移動しても T の面積は変わらないが，さらに B を F まで移動すると，T の面積を増やすことができる．このことは，そもそも最大面積であるという仮定と矛盾する．よって，最大面積の T の頂点のうち，S の頂点と共有しているものの個数が $n-3$ であることはない． ［証明おわり］

また，共有頂点がもっと少ない場合は，定理 3 により否定される．共有頂点の個数が $n-3$ であることはないので，それ未満もないのである．よって，問題の題意は証明された．

共有頂点が $n-1$ 個の場合は必ず存在するが，$n-2$ 個の場合は必ず存在するとは限らない．$n-2$ 個の共有頂点をもつ内接 $(n-1)$ 角形 T が存在する必要十分条件は，S のなかの角の三角形のうち，面積最小となるものが複数あり，さらにそれらのうちどれか 2 つが辺を共有していることである．言い換えれば，S の連続する 4 頂点のうち，ある A, B, C, D があって，

$$BC \parallel AD$$

であることであるとも言える．証明は省略する．