

等積多角形分割合同定理とデュードニーの正三角形

イギリスの数学者でパズル作家としても有名なデュードニーは数多くの優れたパズルを残している．その中でも傑作と思われるものに焦点をあてよう．

問題 1 正三角形を四つに切り分けて正方形を作れ．

[解] 1832 年に Bolyai と Gerwien とによって証明された等積多角形分割合同定理というものがある．多角形を有限回分割し，並べ替えることにより同じ面積のあらかじめ指定された多角形を作ることができるというものである（証明は省略する）．ちなみにこれが三次元つまり多面体では一般に成り立たないことが証明されている（ヒルベルトの第三問題）．

さて，分割合同変換ができることはわかっているが，実際にそれを行うことはそれほど易しくはなく，特になるべく少ない分割によって実現することは困難を伴う．この問題もノーヒントで解くにはかなりの難問である．正三角形の大きさは一般の場合に設定してもよいが，計算しやすいように一辺の長さを 2 としよう．面積は $\sqrt{3}$ になるので，正方形の一辺の長さは $\sqrt[4]{3}$ となることは容易にわかる．しかしこれだけわかって一気に正解に近づくわけではない．

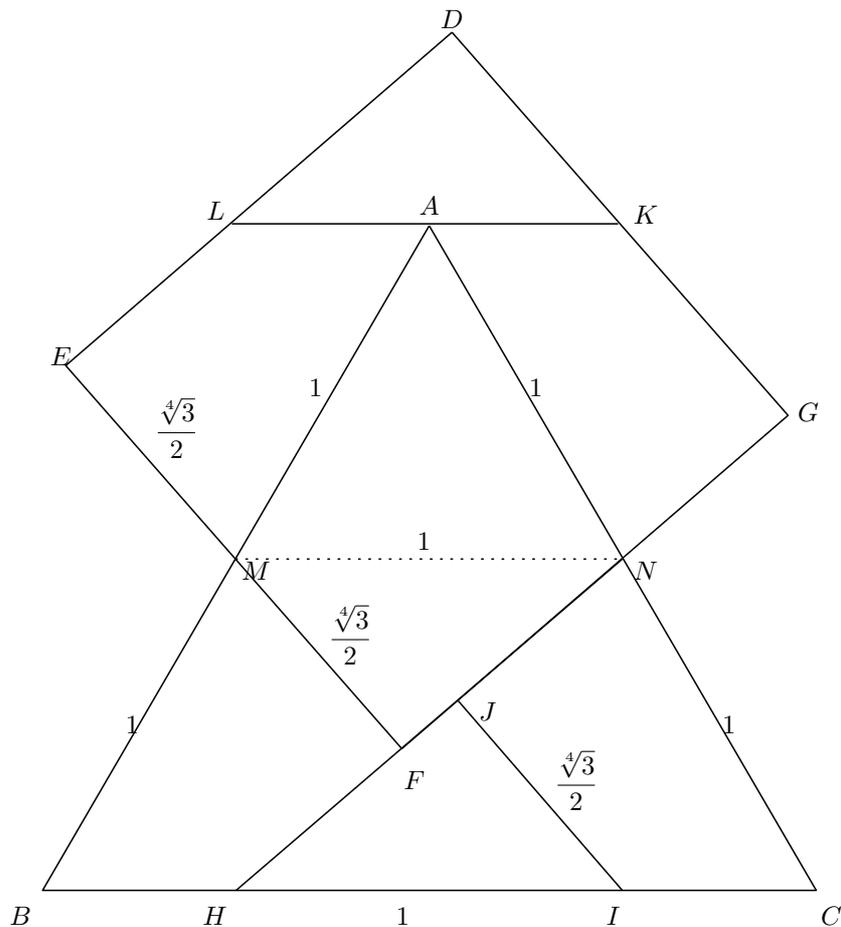


図 1

まず正方形を作るには四つの直角が必要である．複数の角を足して直角にすることもできるが，四つのピースがそれぞれ一つずつの直角をもつことが簡単そうである．また正三角形の 60° は不要なので 180° あるいは 90° にしなければならない．後者は 30° が必要なので，三つの 60° で 180° にするのが簡単そうである．そのためにはこの 60° の頂点は1点で交わる必要がある．これらのことから図1のうち

$$AM = BM = AN = CN = HI = 1$$

であることがわかる．また K, M は正方形の一辺の中点でもあるので，

$$JI = MF = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}$$

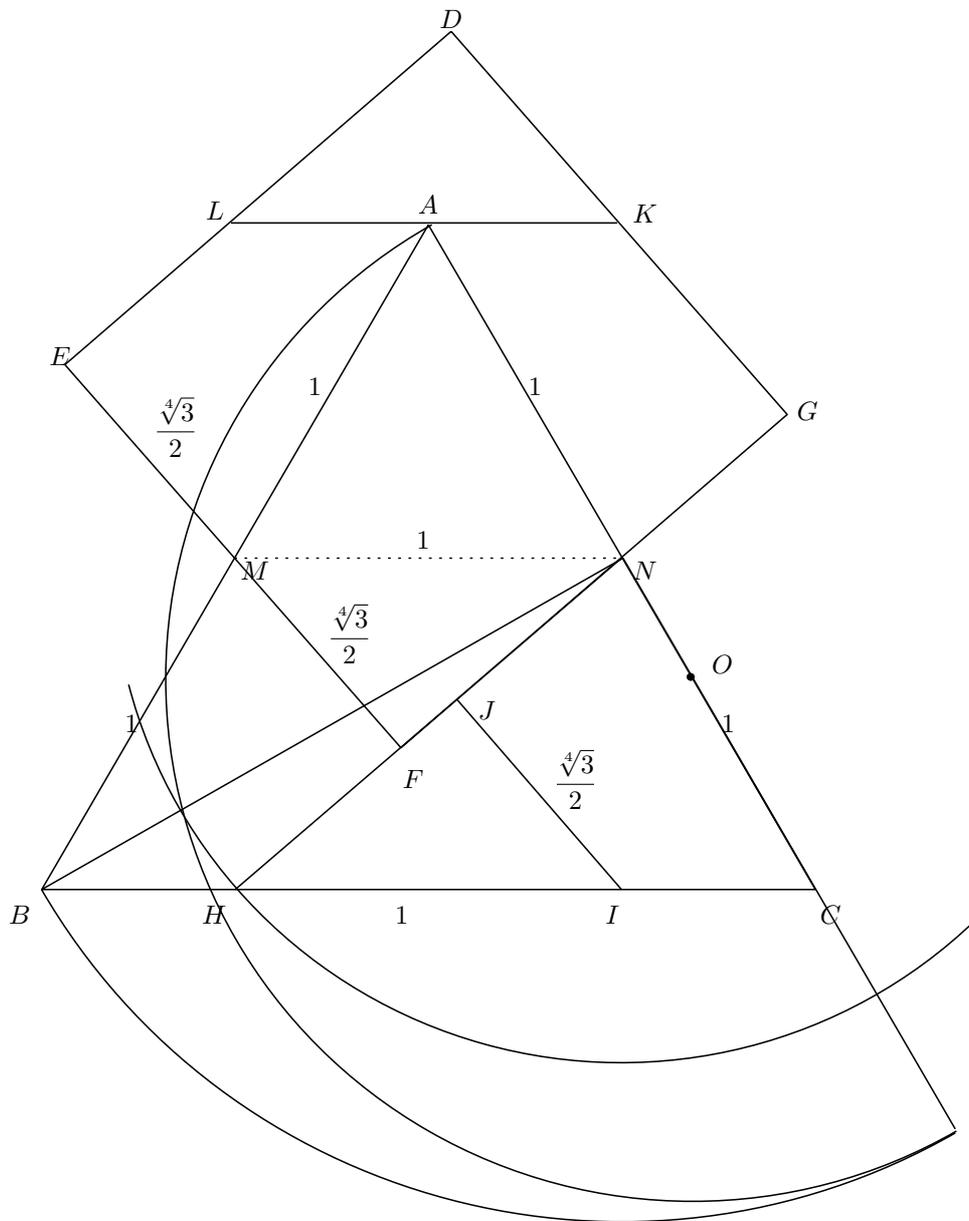


図2

である．しかし，これだけではまだ正確に作図するには情報が不足している．

$$DE = NH = \sqrt[4]{3}$$

であることを用いれば，一応定規とコンパスだけで作図可能である． $\sqrt[4]{3}$ はどのように作ればよいかというと，これもそれほど簡単な問題ではないが，要するに $x^2 = \sqrt{3}$ となるような二次方程式を作ればよいのである．先ほどの図上であえて行えば図 2 のようになるが，少しわかりにくい．あえて重ねてやる必要はないので，その部分だけ取り出すと次のようになる．

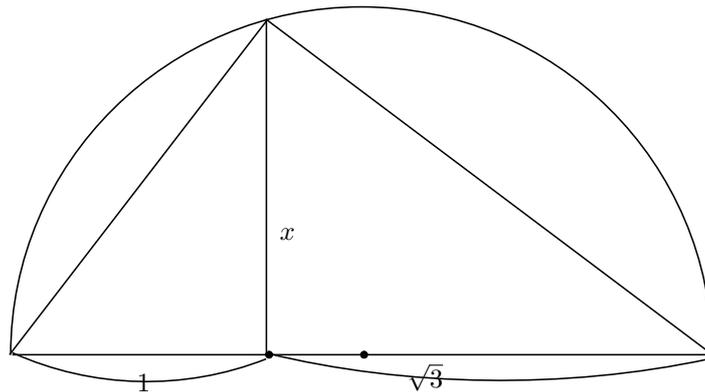


図 3

つまり，三平方の定理を 3 回適用して，

$$1 + x^2 + x^2 + 3 = (1 + \sqrt{3})^2$$

という方程式ができ，これを解くと

$$x = \sqrt[4]{3}$$

となるわけである．

よく見ると，平行四辺形 $HIMN$ 長方形のように見えるがわずかに違う．仮にこれが長方形だと仮定すると，三平方の定理より，

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0.866$$

これが

$$MH = NI = \sqrt{\sqrt{3} - 1} \simeq 0.856$$

と等しくならないという矛盾に到達する．よって平行四辺形 $HIMN$ は長方形ではない．つまり点 A は線分 KL の中点ではない．

さて，実際にデュードニーの正三角形を作ってみよう．厚紙を使っても簡単に作ることができるが，本格的に蝶番を使って堅牢なものを作ってみた．若干の根気と半日以上時間があれば可能である．写真 1 のように全てつなげることができる．これをぶら下げて見せて，「さてこの形を組み立てると三角か四角ができます．さてどちらでしょう．」と言って，特定の一人に答えさせ，その反対の図形を作ってみせて，「残念でした．」とい

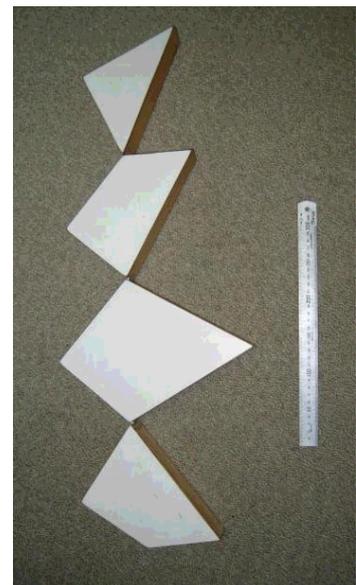


写真 1



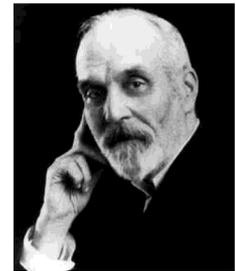
写真 2

で、のちほど種明かしをするというシナリオである（写真 2，左，中央）。中にはネタを知っていて、正方形か正三角形ができると答える子供がたまにいる。その場合は写真 2（右）のような図形を作って見せて、「残念でした。台形でした。」と逃げるのである。

1905 年にデュードニーは王立協会に招かれ、このパズルをデモンストレーションし、列席した数学者たちを驚かせたそうである。

ヘンリー・アーネスト・デュードニー（Henry Ernest Dudeney, 1857 ~ 1930）

英国のパズル作家、数学者。祖父は羊飼いかから校長になった。父も校長であった。デュードニーは子供のころよりチェスを得意とし、9 歳でパズルを地方紙に投稿している。13 歳で公務員になる。妻のアリス・ホイットティアは、ベストセラー作家で、生計の多くを妻に頼っていた。デュードニーは、ストランド・マガジン誌上で多くの作品を発表した。意味のある単語を用いた覆面算は彼が最初に作った。（例 SEND+MORE=MONEY）アーサー・コナン・ドイルとも交流があり、アメリカのパズル王、サム・ロイドと親交が厚かったが、ロイドがデュードニーの作品を自分のものとして発表してから関係が悪化した。ビリヤードやボウリング、特にクロケット（画像で見る限りゲートボールに似ている）を趣味とした。ピアノやバイオリンもこなした。1930 年咽頭癌により死す。享年 73 歳。（肖像は [3] より引用）



参考文献

- [1] 'The MacTutor History of Mathematics archive' <<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/>>
- [2] 'Wikipedia' <<http://en.wikipedia.org/wiki/>>
- [3] 'www.squaring.net 2008' <<http://www.squaring.net/index.html>>