フォイエルバッハの定理

フォイエルバッハの定理は初等幾何で証明するには難解過ぎる．私のような凡人にとっては初等幾何の限界を超えていると言ってよい．ここではベクトルを用いて証明してみよう．

$\triangle ABC$ の外心を O とし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OC}=\vec{c}, |\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ とする．また頂点 A, B, C の対辺の長さを $a, b, c, s=\dfrac{a+b+c}{2}$，内接円の半径を r，$\triangle ABC$ の面積を S とする．以後の議論を以上の条件において進める．

1　内接円の半径と九点円の半径を比べると

定理 1 九点円の半径は外接円の半径の $\dfrac{1}{2}$ である．

［証明］九点円は辺の中点を結ぶ三角形，つまり元の三角形の $\dfrac{1}{2}$ の三角形の外接円であるので当然である．

［証明おわり］

よって，上述の条件では外接円の半径は $\dfrac{1}{2}$ である．

問題 1 内接円の半径を求めよ．

［解］面積の公式と，正弦定理より，

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{abc}{4}$$

一方，

$$S=\frac{(a+b+c)r}{2}=sr$$

より，

$$r=\frac{abc}{4s}\cdots Ans.$$

2　内心はどこにあるか

問題 2 $\triangle ABC$ の内心を $I, \overrightarrow{OI}=\vec{i}$ とする．$\vec{i}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, a, b, c$ で表せ．

［解］直線 AI と辺 BC の交点を D とすると，

$$BD=\frac{ac}{b+c}$$

I は AD を $b+c:a$ に内分するので

$$\begin{aligned}\vec{i}&=\frac{a\vec{a}+(b+c)\overrightarrow{OD}}{a+b+c}\\&=\frac{a\vec{a}+(b+c)\dfrac{b\vec{b}+c\vec{c}}{b+c}}{a+b+c}\\&=\frac{a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{a+b+c}=\frac{a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{2s}\cdots Ans.\end{aligned}$$

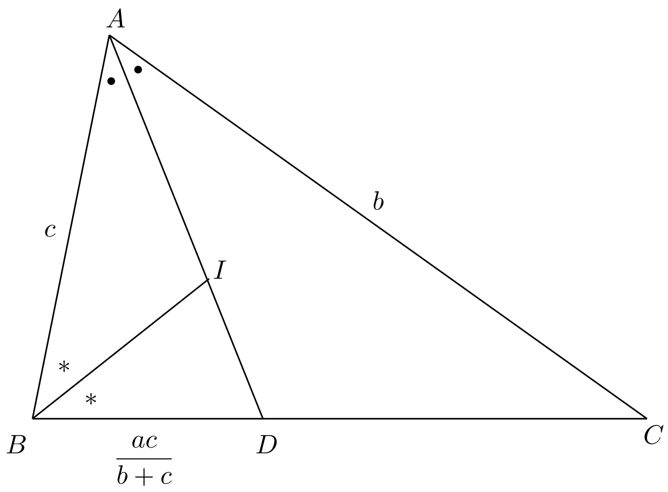

図 1

3　九点円の中心はどこにあるか

問題 3 $\triangle ABC$ の垂心を H とすると，

$$\overrightarrow{OH} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

であることを証明せよ．

［証明］$\vec{h} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ とすると，

$$(\vec{h} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{c} = 1 - 1 = 0$$

同様に

$$(\vec{h} - \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = (\vec{h} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$$

$$\therefore \overrightarrow{OH} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

［証明おわり］

九点円の中心は外心と垂心の中点にある（証明略）ので九点円の中心を $N, \overrightarrow{ON} = \vec{n}$ とすると，

$$\vec{n} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{2}$$

4　内心と九点円の中心の距離は

$$\vec{n} - \vec{i} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{2} - \frac{a\vec{a} + b\vec{b} + c\vec{c}}{2s} = \frac{(s-a)\vec{a} + (s-b)\vec{b} + (s-c)\vec{c}}{2s}$$

$$|\vec{n} - \vec{i}|^2$$
$$= \frac{(s-a)^2 + (s-b)^2 + (s-c)^2 + 2(s-a)(s-b)\vec{a} \cdot \vec{b} + 2(s-b)(s-c)\vec{b} \cdot \vec{c} + 2(s-c)(s-a)\vec{c} \cdot \vec{a}}{4s^2}$$

式が長いので分割して計算すると,

$$\begin{aligned}
&(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2\\
=&\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{4}+\frac{ab-bc-ca-ab+bc-ca-ab-bc+ca}{2}\\
=&\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{4}-\frac{ab+bc+ca}{2}
\end{aligned}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{|\vec{a}-\vec{b}|^2-1-1}{2}=1-\frac{c^2}{2}$$

同様に

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=1-\frac{a^2}{2},\vec{c}\cdot\vec{a}=1-\frac{b^2}{2}$$

$$\begin{aligned}
\therefore 2(s-a)(s-b)\vec{a}\cdot\vec{b}=&\frac{\{c^2-(a-b)^2\}(2-c^2)}{4}\\
=&\frac{\{c^2-a^2-b^2+2ab\}(2-c^2)}{4}\\
=&\frac{-c^4+c^2a^2+b^2c^2-2abc^2+2c^2-2a^2-2b^2+4ab}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\therefore 2(s-a)(s-b)\vec{a}\cdot\vec{b}+2(s-b)(s-c)\vec{b}\cdot\vec{c}+2(s-c)(s-a)\vec{c}\cdot\vec{a}\\
=&\frac{-a^4-b^4-c^4+2c^2a^2+2b^2c^2+2a^2b^2-2abc^2-2ab^2c-2a^2bc-2c^2-2a^2-2b^2+4ab+4bc+4ca}{4}
\end{aligned}$$

一方，ヘロンの公式より

$$\begin{aligned}
S^2&=s(s-a)(s-b)(s-c)\\
&=\frac{1}{16}(-c+b+a)(c-b+a)(c+b-a)(c+b+a)\\
&=\frac{1}{16}(-a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2)\\
\therefore a^2b^2c^2&=-a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\therefore 2(s-a)(s-b)\vec{a}\cdot\vec{b}+2(s-b)(s-c)\vec{b}\cdot\vec{c}+2(s-c)(s-a)\vec{c}\cdot\vec{a}\\
=&\frac{a^2b^2c^2-4abcs-2c^2-2a^2-2b^2+4ab+4bc+4ca}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2+2(s-a)(s-b)\vec{a}\cdot\vec{b}+2(s-b)(s-c)\vec{b}\cdot\vec{c}+2(s-c)(s-a)\vec{c}\cdot\vec{a}\\
=&\frac{a^2b^2c^2-4abcs+c^2+a^2+b^2+2ab+2bc+2ca}{4}\\
=&\frac{a^2b^2c^2-4abcs+4s^2}{4}\\
=&\frac{(abc-2s)^2}{4}
\end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{n}-\vec{i}|^2 = \frac{(abc-2s)^2}{(4s)^2}$$
$$= \left(\frac{abc}{4s}-\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\therefore |\vec{n}-\vec{i}| = \left|\frac{abc}{4s}-\frac{1}{2}\right| = \left|r-\frac{1}{2}\right|$$

内接円と九点円の中心の距離は，二つの半径の差に等しい．つまり二つの円は接する．よってフォイエルバッハの定理は証明された．

5　傍接円の半径

フォイエルバッハの定理は内接円だけでなく，傍接円も九点円に接するというものである．よって後半は傍接円について調べてみよう．

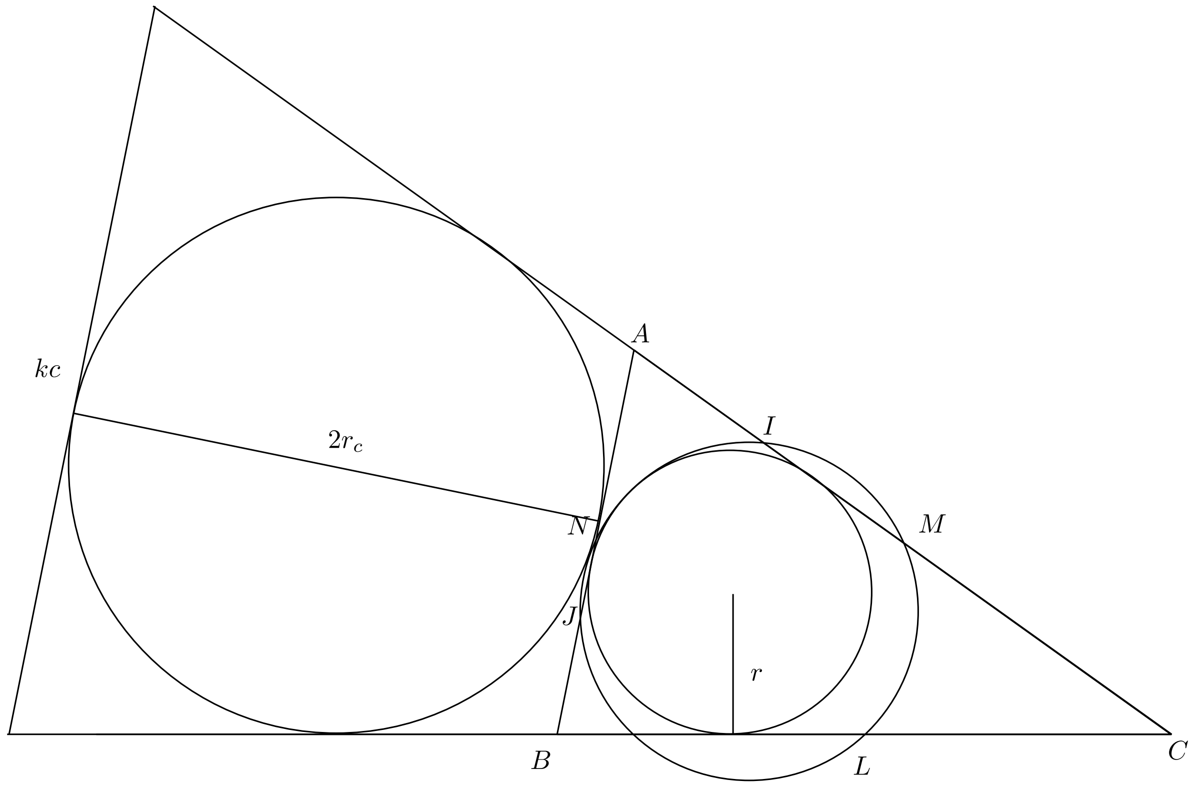

図 2

辺 AB に接する傍接円の半径を $r_c = kc$ とすると，図 2 のように面積を調べることにより，

$$kr(c+kc)+S=k^2S$$
$$k^2(cr-S)+kcr+S=0$$
$$\{(cr-S)k+S\}(k+1)=0$$

$$
\begin{aligned}
\therefore k &= \frac{S}{S-cr} \\
&= \frac{sr}{sr-cr} \\
&= \frac{a+b+c}{a+b-c} \\
\therefore r_c &= \frac{abc}{2(a+b-c)}
\end{aligned}
$$

6　傍心はどこにあるか

問題 4 $\triangle ABC$ の辺 AB に接する傍接円の傍心を $E, \overrightarrow{OE} = \vec{e}$ とする．$\vec{e}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, a, b, c$ で表せ．

［解］直線 AE と辺 BC の交点を D とすると，

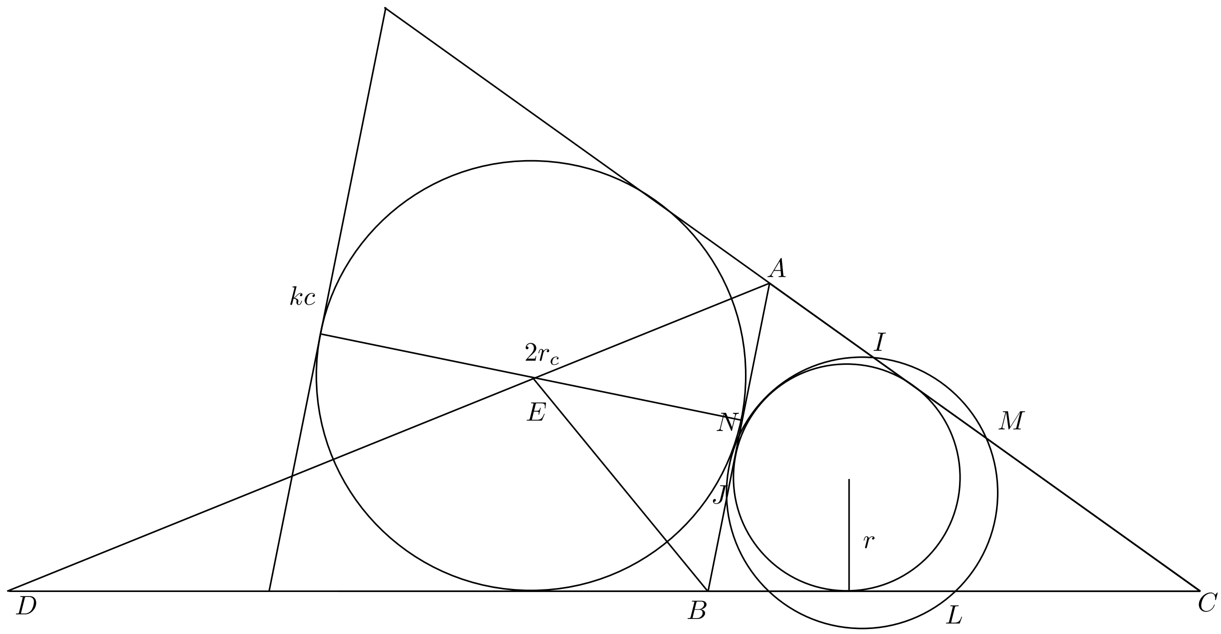

図 3

図 3 において

$$
\begin{aligned}
CD : DB &= b : c \\
BD &= \frac{ac}{b-c}
\end{aligned}
$$

つまり，傍心 E は AD を $b-c : a$ に内分するので

$$
\begin{aligned}
\vec{i} &= \frac{a\vec{a} + (b-c)\overrightarrow{OD}}{a+b-c} \\
&= \frac{a\vec{a} + (b-c)\dfrac{b\vec{b} - c\vec{c}}{b-c}}{a+b-c} = \frac{a\vec{a} + b\vec{b} - c\vec{c}}{a+b-c} \cdots Ans.
\end{aligned}
$$

図 3 は $b > c$ の場合であるが，$b \leq c$ の場合も同様の結果となる．

7　傍心と九点円の中心の距離は

$$\vec{n}-\vec{e}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{a\vec{a}+b\vec{b}-c\vec{c}}{a+b-c}=\frac{(-a+b-c)\vec{a}+(a-b-c)\vec{b}+(a+b+c)\vec{c}}{2(a+b-c)}$$

$$\begin{aligned}&|\vec{n}-\vec{e}|^2\\=&\frac{(-a+b-c)^2+(a-b-c)^2+(a+b+c)^2}{4(a+b-c)^2}\\&+\frac{2(-a+b-c)(a-b-c)\vec{a}\cdot\vec{b}+2(a-b-c)(a+b+c)\vec{b}\cdot\vec{c}+2(a+b+c)(-a+b-c)\vec{c}\cdot\vec{a}}{4(a+b-c)^2}\end{aligned}$$

式が長いので分割して計算すると，

$$\begin{aligned}&(-a+b-c)^2+(a-b-c)^2+(a+b+c)^2\\=&3(a^2+b^2+c^2)+2(-ab-bc+ca-ab+bc-ca+ab+bc+ca)\\=&3(a^2+b^2+c^2)+2(-ab+bc+ca)\end{aligned}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1-\frac{c^2}{2},\vec{b}\cdot\vec{c}=1-\frac{a^2}{2},\vec{c}\cdot\vec{a}=1-\frac{b^2}{2}$$

より，

$$\begin{aligned}2(-a+b-c)(a-b-c)\vec{a}\cdot\vec{b}=&\{c^2-(a-b)^2\}(2-c^2)\\=&\{c^2-a^2-b^2+2ab\}(2-c^2)\\=&-c^4+c^2a^2+b^2c^2-2abc^2+2c^2-2a^2-2b^2+4ab\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\therefore 2(-a+b-c)(a-b-c)\vec{a}\cdot\vec{b}+2(a-b-c)(a+b+c)\vec{b}\cdot\vec{c}+2(a+b+c)(-a+b-c)\vec{c}\cdot\vec{a}\\=&-a^4-b^4-c^4+2c^2a^2+2b^2c^2+2a^2b^2-2abc^2+2ab^2c+2a^2bc-2c^2-2a^2-2b^2+4ab-4bc-4ca\end{aligned}$$

一方，ヘロンの公式より

$$\begin{aligned}S^2&=s(s-a)(s-b)(s-c)\\&=\frac{1}{16}(-c+b+a)(c-b+a)(c+b-a)(c+b+a)\\&=\frac{1}{16}(-a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2)\\\therefore a^2b^2c^2&=-a^4-b^4-c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\therefore 2(-a+b-c)(a-b-c)\vec{a}\cdot\vec{b}+2(a-b-c)(a+b+c)\vec{b}\cdot\vec{c}+2(a+b+c)(-a+b-c)\vec{c}\cdot\vec{a}\\=&a^2b^2c^2+2abc(a+b-c)-2c^2-2a^2-2b^2+4ab-4bc-4ca\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(-a+b-c)^2+(a-b-c)^2+(a+b+c)^2\\&+2(-a+b-c)(a-b-c)\vec{a}\cdot\vec{b}+2(a-b-c)(a+b+c)\vec{b}\cdot\vec{c}+2(a+b+c)(-a+b-c)\vec{c}\cdot\vec{a}\\=&a^2b^2c^2+2abc(a+b-c)+c^2+a^2+b^2+2ab-2bc-2ca\\=&a^2b^2c^2+2abc(a+b-c)+(a+b-c)^2\\=&\{abc+(a+b-c)\}^2\end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{n}-\vec{e}|^2 = \frac{\{abc+(a+b-c)\}^2}{4(a+b-c)^2} = \left(\frac{abc}{2(a+b-c)}+\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\therefore |\vec{n}-\vec{e}| = \left|\frac{abc}{2(a+b-c)}+\frac{1}{2}\right| = \left|r_c+\frac{1}{2}\right|$$

傍接円と九点円の中心の距離は，二つの半径の和に等しい．つまり二つの円は接する．よってフォイエルバッハの定理の傍接円に関する部分は証明された．

問題 5 内接円と九点円の接点 F を**フォイエルバッハ円**と呼ぶ．$\vec{f}=\overrightarrow{OA}$ を $\vec{a},\vec{b},\vec{c},a,b,c$ で表せ．

［解］

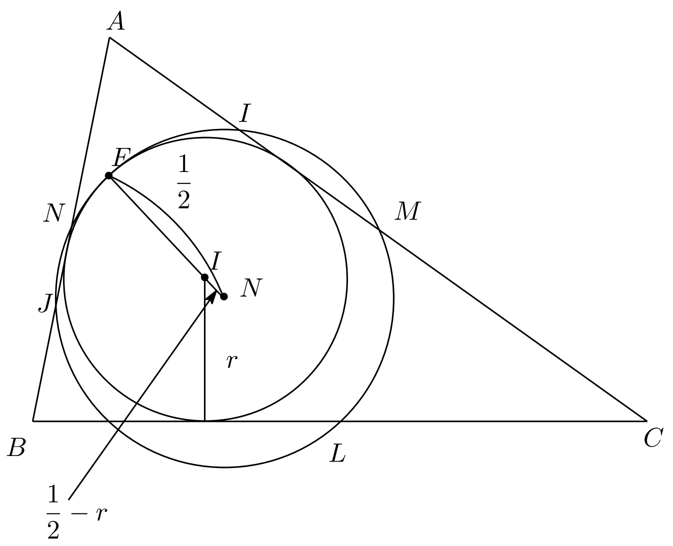

図 4

F は NI を $\frac{1}{2}:r$ に外分するので，

$$\vec{f} = \frac{-r\vec{n}+\frac{1}{2}\vec{i}}{\frac{1}{2}-r} = \frac{-2r\vec{n}+\vec{i}}{1-2r} = \frac{-2r\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}+\frac{a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}}{2s}}{1-2r} = \frac{a\vec{a}+b\vec{b}+c\vec{c}-2rs(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})}{2s(1-2r)} = \frac{a(2-bc)\vec{a}+b(2-ca)\vec{b}+c(2-ab)\vec{c}}{2(a+b+c-abc)}\cdots Ans.$$

フォイエルバッハ (Karl Wilhelm Feuerbach, 1800.5.30-1834.3.12)

ドイツ，イェーナ (Jena) に生まれ，エアランゲン（Erlangen）に死す．父親のポール・J.A. リッター・フォン・フォイエルバッハは法学者．弟のルードヴィッヒ・A. フォイエルバッハ (1804-72）は哲学者．他の兄弟も，多くが学者になっているので，学術的な環境で育ったものと思われる．22 歳までに博士号を取得し，エアランゲンのギムナジウムの教授に任命される．健康に優れず，1828 年に退職，残りの 6 年は隠遁生活を送る．若くして健康を害し，早くに亡くなったため業績は多くない．

1822 年に九点円の論文を書く．1827 年の論文では，メビウスと独立に斉次座標を導入している．

[2] によれば，投獄 (imprisonment) されたこともあると記述がある．投獄ではなく，拘束，あるいは入院と訳すべきであろうか．また，[2],[3] には，自分の学生を刀で脅して退職したとも書いてある．髪，髭，爪は伸び放題であったそうで，短い生涯の終わりの方ではかなり精神を病んでいたように思われる．

参考文献

[1] 「人名索引」`<http://www.com.mie-u.ac.jp/~kanie/tosm/humanind/jinmei.htm>`

[2] 'Karl Wilhelm Feuerbach'`<http://faculty.evansville.edu/ck6/bstud/feuerba.html>`

[3] 'Wikipedia'`<http://en.wikipedia.org/wiki/>`

[4] 'Karl Feuerbach'`<http://library.thinkquest.org/22494/stories/Feuerbach.htm>`