四角柱を斜めに切った形

問題 1 図 1 のような正方形 $ABCD$ の四隅を正方形で切り取り，立体を作る．$EFGH$ が平面になるようにするには x をいくつにすればよいか．

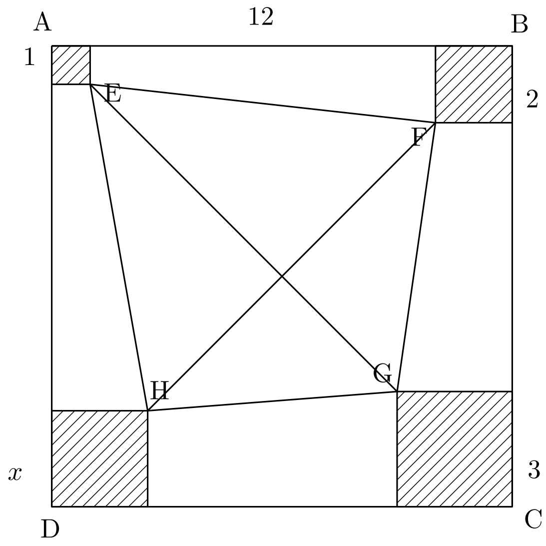

図 1

［解］正方形の中心点 I のところで，高さが等しくなればよいので，内分の公式より，

$$\frac{5\times 3+3\times 1}{5+3}=\frac{(6-x)\times 2+(6-2)\times x}{(6-x)+(6-2)}$$
$$\frac{9}{4}=\frac{2x-12}{10-x}$$
$$x=\frac{42}{17}\simeq 2.47$$

写真 1 に示したように，この立体は簡単にできるが，面白い形をしている．モダンな芸術的な建築の雰囲気をもつ．

問題 2 問題 1 の上底面である（かぶせるように置いたときの天井）四角形 $EFGH$ の面積を求めよ．

［解］これは対角線が直交しているので簡単である．あるいは正方形からまわりの部分を引いてもよい．

$$EG=8\sqrt{2}$$
$$FH=\left(12-2-\frac{42}{17}\right)\sqrt{2}$$
$$=\frac{128\sqrt{2}}{17}$$

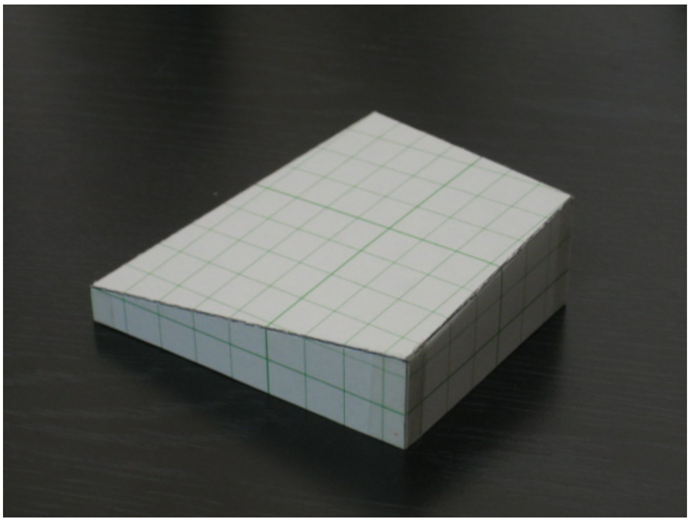

写真 1

求める面積は

$$\frac{1}{2}EG \cdot FH = \frac{1024}{17} \simeq 60.23529411764706$$

問題 3 問題 1 の底面（四角形 $EFGH$ の対面，ふたのないところ）の面積を求めよ．

［解］この問題はもちろん初等的に解けるが，容易というわけではない．図 2 に開放されたほうの面を下におき，上から見たときの底面を示す．底面の 4 辺の長さはそれぞれ，

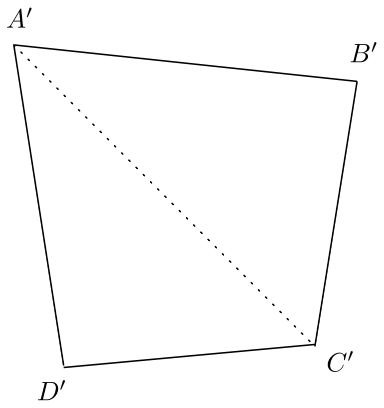

図 2

$$\begin{aligned}
A'B' &= 12 - 1 - 2 = 9 \\
B'C' &= 12 - 2 - 3 = 7 \\
C'D' &= 12 - 3 - \frac{42}{17} = \frac{111}{17} \\
D'A' &= 12 - 1 - \frac{42}{17} = \frac{145}{17}
\end{aligned}$$

であるが，これだけでは面積は決まらない．E, G の高さが 1,3 と整数なので，この立体を $EG(A'C')$ 方向で垂直に切ることにする．その断面は図 2 のような台形となる．$\triangle A'B'C', \triangle A'D'C'$ の 3 辺の長さが与えられ

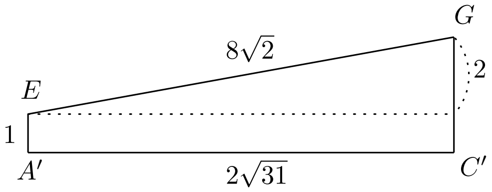

図 3

たので，ヘロンの公式などを用いて求めると，

$$\triangle A'B'C' = 3\sqrt{110}$$

$$\triangle C'D'A' = \frac{45\sqrt{110}}{17}$$

$$\therefore \text{四角形 } A'B'C'D' = \frac{96\sqrt{110}}{17} \simeq 59.22685260254974$$

当然ではあるが，問題 2 の答とさほど差はない．

問題 4 問題 1 の下底面 $A'B'C'D'$ を水平に置いたとき，上底面 $EFGH$ はどの方向に何度傾いているか調べよ．

［解］下底面を xy 平面とし，$\overrightarrow{A'C'}$ を x 軸方向，上から見て x 軸方向から左回りに 90 度回った方向を y 軸方向，上を z 軸方向とする．

平面 $EFGH$ の法線ベクトルを $\vec{a} = (1, a, b)$ とする．$\vec{a}$ は x 軸と垂直ではないので，これで構わない．次の連立方程式を解く．

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \overrightarrow{EG} = 0 \\ \vec{a} \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1, a, b) \cdot (2\sqrt{31}, 0, 2) = 0 & (1) \\ (1, a, b) \cdot (9\cos\theta, 9\sin\theta, 1) = 0 & (2) \end{cases}$$

ただし，ここで θ は $\angle C'A'B'$ を表す．(1) より，

$$b = \sqrt{31}$$

(2) より，

$$9\cos\theta + 9a\sin\theta + \sqrt{31} = 0$$

$$a = \frac{-\sqrt{31} - 9\cos\theta}{9\sin\theta}$$

さてここで，問題 3 より，

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{(A'B')^2+(A'C')^2-(B'C')^2}{2(A'B')(A'C')} \\
&= \frac{81+124-49}{36\sqrt{31}} \\
&= \frac{13}{3\sqrt{31}} \\
\sin\theta &= \frac{\sqrt{110}}{3\sqrt{31}} \\
\therefore a &= \frac{-\sqrt{31}-\dfrac{39}{\sqrt{31}}}{\dfrac{3\sqrt{110}}{\sqrt{31}}} \\
&= \frac{-31-39}{3\sqrt{110}} \\
&= \frac{-70}{3\sqrt{110}}
\end{aligned}$$

ここで

$$\tan\alpha = \frac{-70}{3\sqrt{110}}$$

とおくと，

$$\alpha = \arctan\frac{-70}{3\sqrt{110}} \simeq -65.8^\circ$$

$\overrightarrow{a}$ を上向きとした場合は，114.2° となる．$\overrightarrow{a}$ と z 軸となす角の大きさを β とすると，

$$\begin{aligned}
\tan\beta &= \frac{\sqrt{1+a^2}}{b} \\
&= \frac{\sqrt{1+\dfrac{490}{99}}}{\sqrt{31}} \\
&= \frac{\sqrt{\dfrac{589}{99}}}{\sqrt{31}} \\
&= \frac{\dfrac{\sqrt{19\cdot 31}}{3\sqrt{11}}}{\sqrt{31}} \\
&= \frac{\sqrt{19}}{3\sqrt{11}} \\
\beta &\simeq 23.7^\circ
\end{aligned}$$

つまり x 軸から測って 114.2° の方向に 23.7° 傾いている．検算を行っていないためこの結果については正しいという自信はない．

定理 1 底面積 S の三角柱を垂直に立て，斜めに切ったときの立体を考える．垂直な辺の長さが a, b, c であったとき，この立体の体積は次で表される．

$$V = \frac{a+b+c}{3}S$$

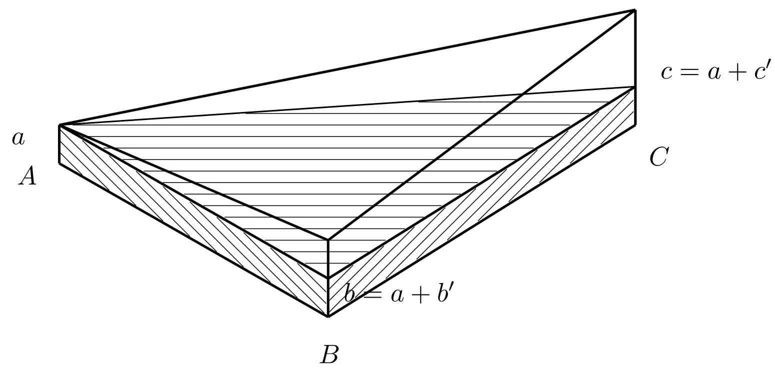

図 4

［証明］各定数を図 4 のようにおく．また $\triangle ABC$ の辺 BC を底辺とする高さを h，辺 BC を含む台形の高さ（つまり BC）を h' とすると，

$$S = \frac{hh'}{2} \tag{3}$$

三角柱の部分の体積 V_1 は

$$V = Sa \tag{4}$$

三角柱を除いた部分は台形錘となり，底面となる台形の上底および下底は b', c'，高さは h'，錘としての高さは h であるから，この部分の体積 V_2 は

$$\begin{aligned}
V_2 &= \frac{\frac{1}{2}(b'+c')h'}{3}h \\
&= \frac{S(b'+c')}{3} \\
\therefore V &= V_1 + V_2 \\
&= Sa + \frac{S(b'+c')}{3} \\
&= \frac{S(3a+b'+c')}{3} \\
&= \frac{a+b+c}{3}S
\end{aligned}$$

［証明おわり］

三つの三角錐に分けて，直感的に理解することも可能である．この定理は斜めに切ったときにできる三角形の重心の高さを測って底面積にかければ体積が求まることを示している．

問題 5 問題 1 の立体の体積（容積）を求めよ．

問題 2 で求めた数値を使うために $A'C'$ 方向でまず切る．二つできる図形の一方の展開図は図 4 の通りである．定理 1 より，この立体の体積は

$$\triangle A'B'C' \times \left(\frac{1+2+3}{3}\right) = 6\sqrt{110}$$

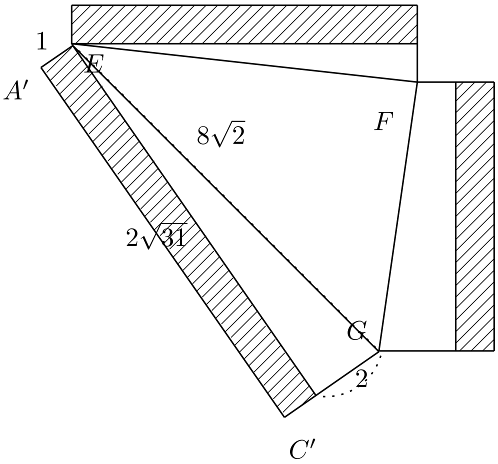

図 5

である．同様に残りの立体の体積は，

$$\triangle C'D'A' \times \left(\frac{1+3+\dfrac{42}{17}}{3} \right) = \triangle C'D'A' \times \frac{110}{51} = \frac{1650}{289}\sqrt{110}$$

よって求める体積は

$$\frac{3384}{289}\sqrt{110} \simeq 122.8086208376399 \cdots Ans.$$

正四角柱の場合の最大値 128 より小さいのは当然であるが，それほど大きな違いはない．

問題 6 問題 1 を一般化せよ．

［解］正方形の一辺の長さを $2l$，切り取る部分の 4 つの正方形の一辺の長さをそれぞれ a, b, c, d とする．

$$\frac{(l-a)c+(l-c)a}{(l-a)+(l-c)} = \frac{(l-b)d+(l-b)b}{(l-b)+(l-d)}$$

l について整理すれば，

$$(b+d-a-c)l^2 + 2(ac-bd)l + b\,c\,d - a\,c\,d + a\,b\,d - a\,b\,c = 0$$

d について解けば

$$d = \frac{(c-b+a)\,l^2 - 2\,a\,c\,l + a\,b\,c}{l^2 - 2\,b\,l + ab + bc - ca}$$

となる．

問題 7 問題 1 において，元の紙が横 12，縦 10 の長方形であった場合について考えよ．

［解］正方形の場合は，どんな切り方をしても，上底面の四角形の対角線の交点が，もとの正方形の中心から動かなかったので計算が楽であった．しかし長方形になるとこれが動くので，膨大な計算を強いられることになる．それではやってみよう．

まず直線 EG がどのような直線になるのか調べる．

$$y - 9 = \frac{9-3}{1-9}(x-1)$$

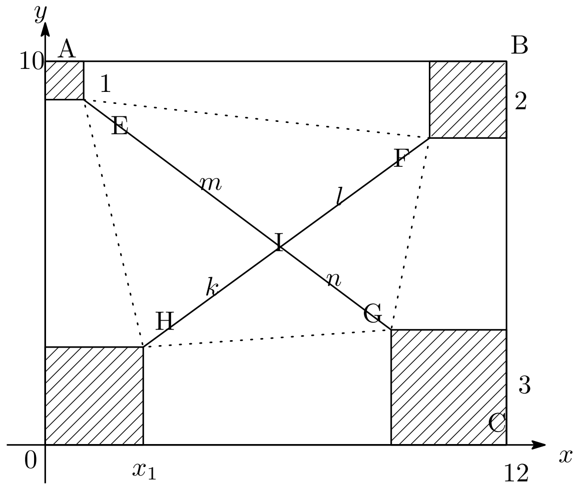

図 6

整理して

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{39}{4} \tag{5}$$

同様にして直線 FH の方程式を求めると

$$y - 8 = \frac{x_1 - 8}{x_1 - 10}(x - 10) \tag{6}$$

この二つの直線の交点 I の x 座標を求めるために (5),(6) より y を消去して,

$$-\frac{3}{4}x + \frac{39}{4} - 8 = \frac{x_1 - 8}{x_1 - 10}(x - 10)$$

x について解くと,

$$x = \frac{47x_1 - 390}{7x_1 - 62}$$

$HI : IF = k : l$ とすると,

$$\begin{aligned} k : l &= \frac{47x_1 - 390}{7x_1 - 62} - x_1 : 10 - \frac{47x_1 - 390}{7x_1 - 62} \\ &= -(7x_1 - 39)(x_1 - 10) : 23x_1 - 230 \end{aligned}$$

同様に $EI : IG = m : n$ とおいて同様の計算を進めると,

$$\begin{aligned} m : n &= \frac{47x_1 - 390}{7x_1 - 62} - 1 : 9 - \frac{47x_1 - 390}{7x_1 - 62} \\ &= \frac{40x_1 - 328}{7x_1 - 62} : \frac{16x_1 - 168}{7x_1 - 62} \\ &= 5x_1 - 41 : 2x_1 - 21 \end{aligned}$$

点 I で同じ高さにならなくてはいけないので,

$$\begin{gathered} \frac{3m + n}{m + n} = \frac{2k + x_1 l}{k + l} \\ (3m + n)(k + l) = (m + n)(2k + x_1 l) \end{gathered}$$

これに，$k=-(7x_1-39)(x_1-10)s, l=(23x_1-230)s, m=(5x_1-41)t, n=(2x_1-21)t$ を代入して（x_1 を x にかえて）整理すると，

$$-(17x-144)(7x-62)(x-10)=(7x-62)(x-10)(9x+78)$$

$(7x-62)(x-1)$ は 0 になりえないので，

$$-17x+144=9x+78$$

$$x=\frac{33}{13}\simeq 2.538461338$$

途中の計算をかなり省略したがこのように長方形の場合でも解くことができる．さらに長方形の場合も一般化できるがこのあたりでやめておこう．