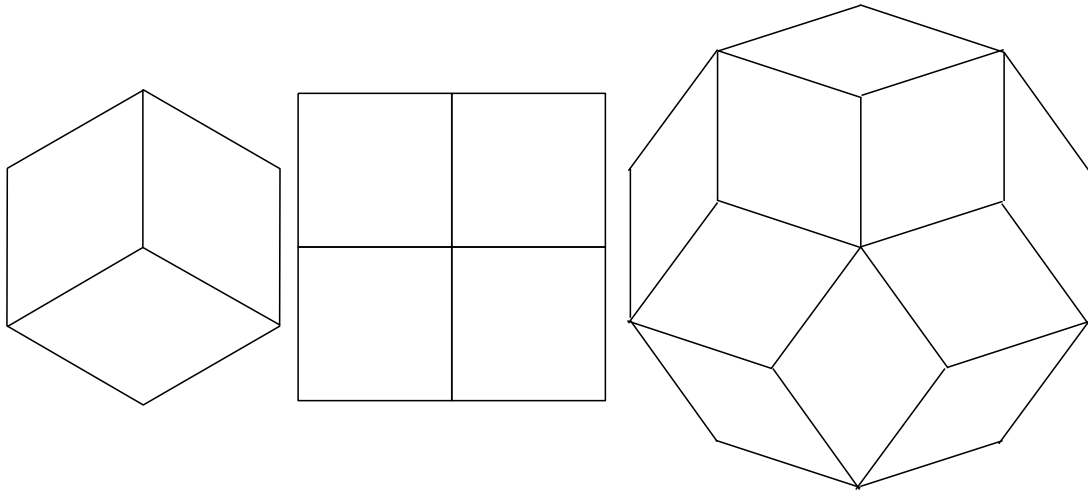
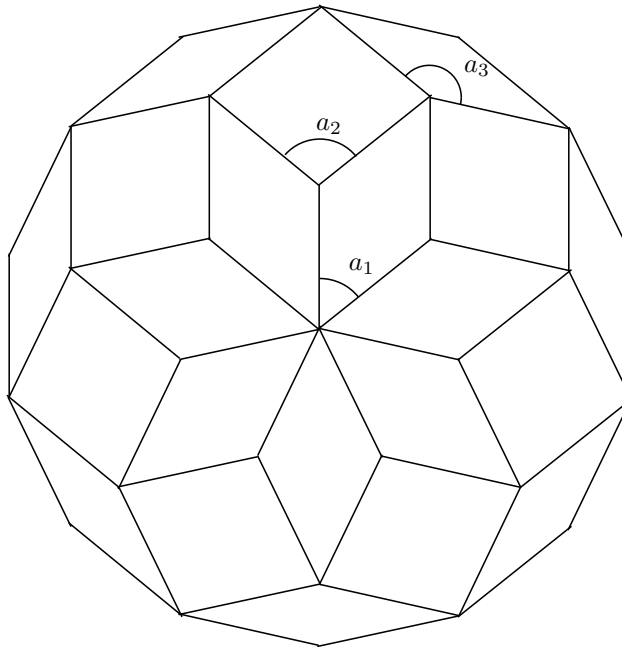


## 菱形正多角形

問題 1 図のように，菱形をならべていくと最後は必ず正多角形になることを証明せよ．またその菱形の総数を求めよ．



上図は正三角形，正方形，正五角形になる場合であるが，正 7 角形の場合を例にとって考えてみよう．図のように  $a_1, a_2, a_3, \dots$  とすると，



$$a_n + 2(\pi - a_{n+1}) + a_{n+2} = 2\pi$$

$$\therefore a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$$

つまりこれら菱形の内角は等差数列になる．一番内側の菱形が  $m$  個である場合は

$$a_1 = \frac{2\pi}{m}$$

であり，公差もこれに等しいことはすぐわかるので，一般項は

$$a_n = \frac{2n\pi}{m}$$

一方正  $m$  角形の内角は  $\frac{(m-2)\pi}{m}$  であるので

$$\frac{2n\pi}{m} = \frac{(m-2)\pi}{m}$$

とおくと， $m$  が偶数のときのみ解があり，

$$n = \frac{m}{2} - 1$$

このとき  $a_{n+1} = \pi$  となり，これ以上外側に菱形はかけない．つまり一番外側の図形は正  $m$  角形である． $m$  が奇数の場合はどうかというと

$$\frac{2n\pi}{m} = \frac{(2m-2)\pi}{2m}$$

つまり，正  $2m$  角形の内角の大きさに等しくなる場合を調べると，

$$n = \frac{m-1}{2}$$

となり，この次の  $a_{n+1}$  は  $\pi$  を超えてしまうので，この場合が最も外側の図形，つまり正  $2m$  角形となる．まとめると，最も内側の菱形の数を  $m$  とした場合， $m$  が偶数の場合最も外側の図形は正  $m$  角形， $m$  が奇数の場合は最も外側の図形は正  $2m$  角形となる． [証明おわり]

菱形の個数は  $m$  が偶数の場合，

$$\frac{m(m-2)}{2} \text{ (個)} \cdots \text{Ans.}$$

$m$  が奇数の場合，

$$\frac{m(m-1)}{2} \text{ (個)} \cdots \text{Ans.}$$

ここまでの図は WinTpic を用いて手動でかいたものであるが，これ以上のものはさすがに手でかくことは不毛な作業となる．よって自動的にかくことを考えた．それほど難しいアルゴリズムではないのでどのようなソフトでもかまわないのだが，出力データがベクトル形式でないとドットが目立って美しくないと思い，いろいろ考えてみた．Perl から TeX に送ることも考えたが煩雑そうなのでやめた．そこで Grapes のスクリプトを使ってみることにした．次の図は  $m = 80$  (プログラム上では  $k$  を用いている．) つまり一番外側が 80 角形の場合の図である．ここまで細かくするとかえって面白くない．それは外周もほとんど円であるのは当然として，中の線も実はほとんど円であるからである．これは少し考えると至極あたりまえのことである． $m$  が偶数の場合は外側だけでなく中にも  $m$  個の正  $m$  角形ができる．奇数の場合は少し様子が違うがやはり円に近づく．

次に示したスクリプトは再帰呼び出しを使ったのでわかりにくいものになってしまった．あまり細かくするとネストが深すぎる，つまり再帰呼び出しが多すぎてエラーとなる．通常の画面上で  $P, Q, R, S$  を適当な座標とともに定義しておかなくてはならない．その際 4 点は非表示にしておいたほうがよいだろう．残像，ドラッ

グ、軌跡も非表示にしておく。菱形の4辺にあたる、 $PQ, SQ, SR, RP$ を連結図形として表示し、線の太さは最も細くし、残像にチェックを入れる。それ以外に前もってやっておくことは無い。再帰呼び出しを使わずとも単純な二重のループで書くこともできるので、もっと細かい図を書こうと思ったらそちらの方が懸命であろう。

```
//main
k:=80//角数
for m:=1 to k
a:=0 //基準の x 座標
b:=0 //基準の y 座標
n:=1 //ネストの深さ, 奇数のみとする
s:=2*Pi/k*m //kakudo
Call(hisigata,a,b)
next

//hisigata
P.x:=x
P.y:=y
Q.x:=x+cos(s-Pi/k*n)
Q.y:=y+sin(s-Pi/k*n)
R.x:=x+cos(s+Pi/k*n)
R.y:=y+sin(s+Pi/k*n)
S.x:=x+cos(s-Pi/k*n)+cos(s+Pi/k*n)
S.y:=y+sin(s-Pi/k*n)+sin(s+Pi/k*n)
if (2n+1)/k>1 then
  S.x:=x
  S.y:=y
endif
overdraw
n:=n+2
if ((2n-1)/k)<=1 then Call(hisigata,S.x,S.y)
endif
```

