ルーローの三角形のドリル

ルーローの三角形を使って四角く穴をあけるドリルというものがあるそうである．この穴の形状や中心の動きについて調べてみよう．

1　頂点の軌跡

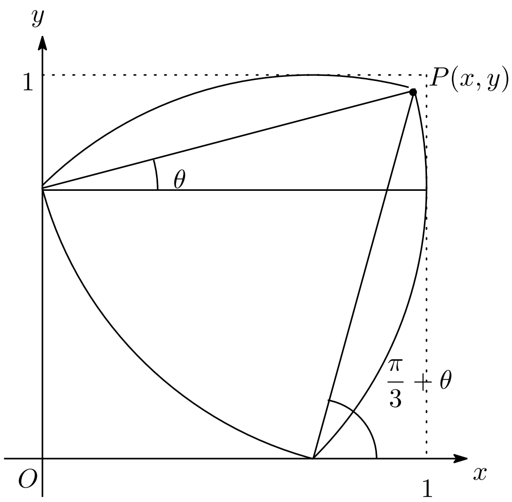

図 1

図 1 のように点 P をおくと，

$$\begin{cases} x = \cos\theta & (1) \\ y = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\theta\right) & (2) \end{cases}$$

(2) より

$$2y = \sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta$$

(2) を代入して

$$(2y-\sqrt{3}x)^2 = 1 - x^2$$
$$4y^2 + 4x^2 - 4\sqrt{3}xy = 1 \qquad (3)$$

P を原点を中心として $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転した点を $Q(X,Y)$ とすると，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

これを (3) に代入すると，

$$2(X-Y)^2 + 2(X+Y)^2 - 2\sqrt{3}(X+Y)(X-Y) = 1$$
$$(4-2\sqrt{3})X^2 + (4+2\sqrt{3})Y^2 = 1$$

つまりこれは楕円である．長軸の長さは $\sqrt{3}+1$，短軸の長さは $\sqrt{3}-1$ である．つまり，このドリルで切り取った穴の形状は図 2 のようになり，正方形の角がわずかに丸くなった形となる．

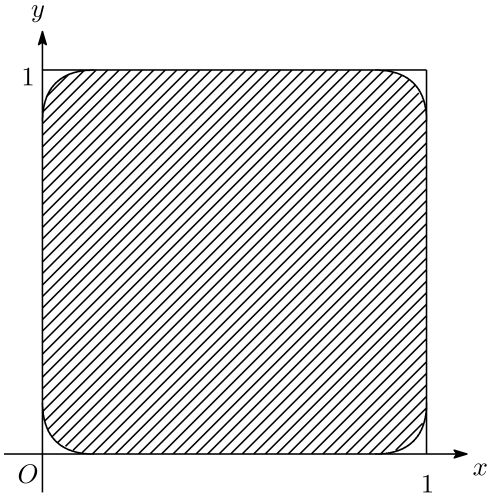

図 2

2　四隅の面積

次にこの穴の四隅の切り残した部分の面積はどのくらいあるのか計算してみよう．

$$
\begin{aligned}
-\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-y)\frac{dx}{d\theta}d\theta &= -\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{2}\sin^2\theta-\sin\theta\right)d\theta \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\theta+\frac{1}{4}(1-\cos 2\theta)-\sin\theta\right)d\theta \\
&= -\frac{1}{8}\left[-\sqrt{3}\cos 2\theta+2\theta-\sin 2\theta+8\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&= -\frac{1}{8}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}+4\sqrt{3}-8\right) \\
&= 1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{24}
\end{aligned}
$$

同じ面積が 4 箇所に生じるので

$$
4-2\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}=0.012299609263946539868000086441671
$$

が切り残した部分の面積である．

3　中心の軌跡

ルーローの三角形の中心（重心）$G(x, y)$ は (1),(2) に少し手を加えるだけで，その軌跡が求まる．つまり

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) & (4) \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) & (5) \end{cases}$$

(4) より

$$2\sqrt{3}x = \sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta \tag{6}$$

(5) より

$$\sqrt{3}y = \cos\theta \tag{7}$$

(6),(7) より θ を消去して

$$(2\sqrt{3}x - 3y)^2 = 1 - 3y^2$$
$$12x^2 + 12y^2 - 12\sqrt{3}xy = 1 \tag{8}$$

G を原点を中心として $-\dfrac{\pi}{4}$ 回転した点を $H(X, Y)$ とすると，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

これを (3) に代入すると，

$$6(X - Y)^2 + 6(X + Y)^2 - 6\sqrt{3}(X + Y)(X - Y) = 1$$
$$(12 - 6\sqrt{3})X^2 + (12 + 6\sqrt{3})Y^2 = 1$$

これも楕円となる．長軸の長さは $\dfrac{3 + \sqrt{3}}{3}$，短軸の長さは $\dfrac{3 - \sqrt{3}}{3}$，つまり先ほどの楕円と相似な楕円となる．このことは双方の媒介変数表示の方程式を比べても明らかである．（図 3）

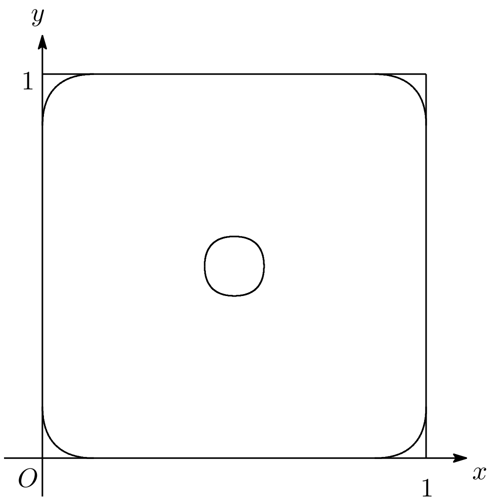

図 3

この中心の軌跡は，ロータリーエンジンの場合のように同心円というわけにはいかないが，円に近い形となる．この中心の回る軌跡で囲まれた部分の面積が，先ほどの面積と等しくなるようなことはないだろうかと興味をもって計算したが，残念ながらそのようなことは無いようである．またこの中心の回る方向は，ルーローの三角形の回る方向とは逆になる．実際のドリルの場合，この中心をどうやって処理しているかというと，どうやらスプリングを使ったジョイントを使っているようである．