りょうけいじゅうにめんたい

# 菱形十二面体

## Rhombic dodecahedron

**問題 1** $t$ を実数とし，$O$ を原点とする座標空間において

$$A(-t,2t,t), B(2-t,1+2t,-1+t), C(3-t,3+2t,-2+t), D(1-t,2+2t,-1+t),$$
$$E(1-t,1+2t,2+t), F(3-t,2+2t,1+t), G(4-t,4+2t,t), H(2-t,3+2t,1+t)$$

とする．$t$ が $0 \leq t \leq 1$ の範囲を動くとき，六面体 $ABCD-EFGH$（内部を含む）の通過する領域の体積を求めよ．

［解］この立体は辺の長さが全て $\sqrt{6}$ の菱形 12 面体の一種である．ただし 12 面は全て合同の菱形というわけではない．

$$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{AB}=(2,1,-1), \overrightarrow{d}=\overrightarrow{AD}=(1,2,-1), \overrightarrow{e}=\overrightarrow{AE}=(1,1,2), \overrightarrow{t}=(-1,2,1)$$

とする．

この立体は 4 つの平行六面体に分割できる．一つは $t=0$ のときの平行六面体 $ABCD-EFGH$ である．残り 3 つはそれぞれ $(\overrightarrow{t}, \overrightarrow{d}\,\overrightarrow{e}), (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{t}\,\overrightarrow{e}), (\overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}\,\overrightarrow{t})$ を三辺にもつ．

平行六面体 $ABCD-EFGH$ の体積は $\overrightarrow{b}, \overrightarrow{d}, \overrightarrow{e}$ のスカラー三重積の絶対値なので

$$\left|[\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{d}\,\overrightarrow{e}]\right| = \left| det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right| = 8$$

残り 3 つの平行六面体の体積は

$$\left|[\overrightarrow{t}\,\overrightarrow{d}\,\overrightarrow{e}]\right| = \left| det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right| = 12$$

$$\left|[\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{t}\,\overrightarrow{e}]\right| = \left| det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right| = 12$$

$$\left|[\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{d}\,\overrightarrow{t}]\right| = \left| det \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right| = 4$$

求める 12 面体の体積 $V$ は

$$V = 8+12+12+4 = \underline{36 \cdots Ans.}$$

さて，この菱形 12 面体の模型を作ってみよう．

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 5$$

より

$$\cos\angle BAD = \frac{5}{6}$$

$$\angle BAD \simeq 33.56^\circ$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} = 1$$

より，

$$\cos \angle EAD = \cos \angle EAB = \frac{1}{6}$$

$$\angle EAD = \angle EAB \simeq 80.41^\circ$$

$$\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AA'} = 1 \times (-1) + 1 \times 2 + 2 \times 1 = 3$$

より

$$\cos \angle EAA' = \frac{1}{2}$$

$$\angle EAA' = 60^\circ$$

$$\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EE'} = \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times (-1) + 1 \times 2 - 1 \times 1 = -1$$

より

$$\cos \angle E'EF = -\frac{1}{6}$$

$$\therefore \Diamond E'EFF' \equiv \Diamond BCGF$$

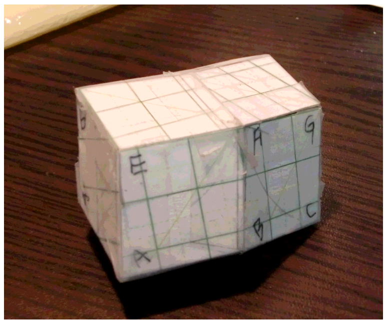
$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA'} = 1 \times (-1) + 2 \times 2 + (-1) \times 1 = 2$$

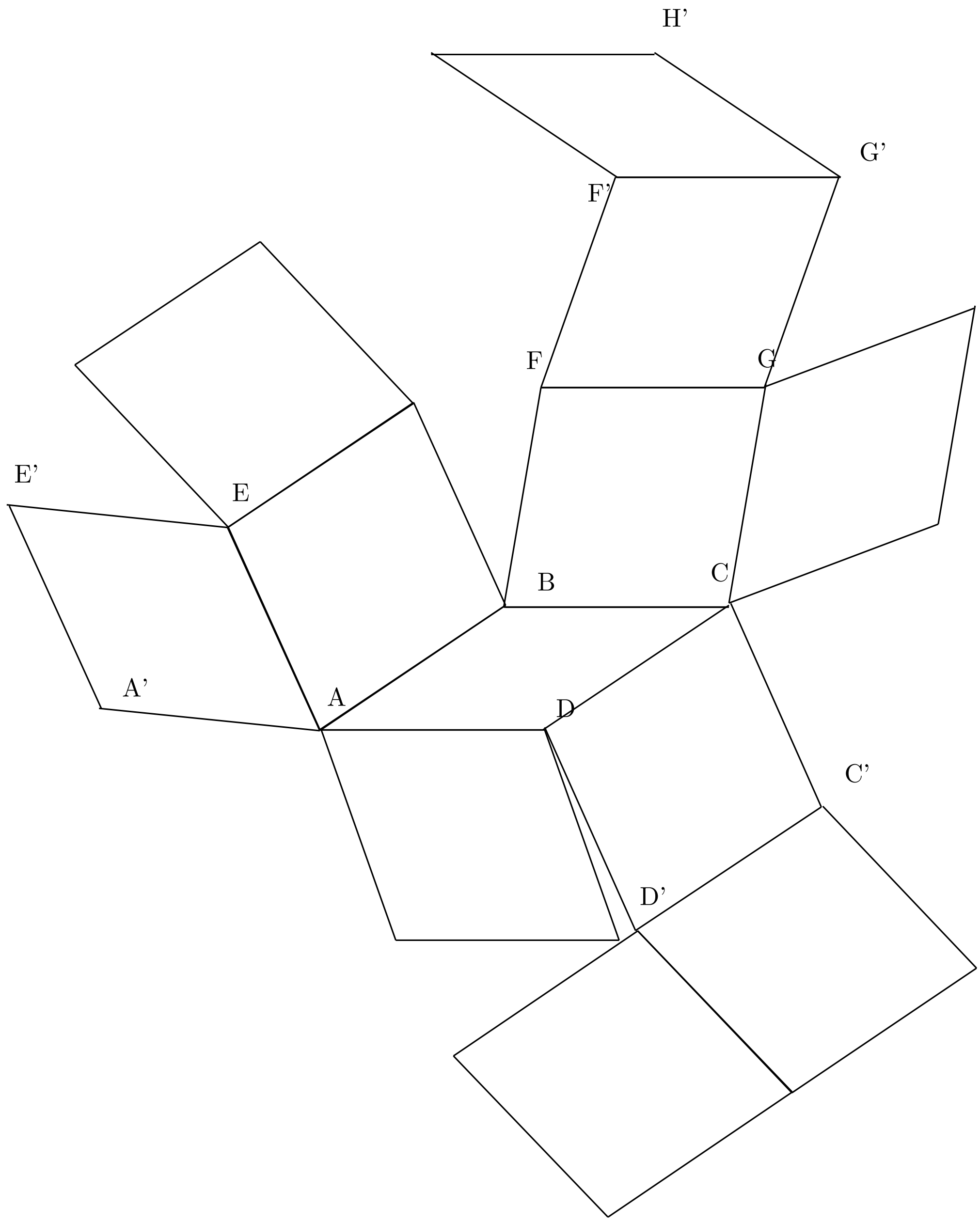
より

$$\cos \angle A'AD = \frac{1}{3}$$

$$\angle A'AD = \simeq 70.53^\circ$$

$\overrightarrow{t}$ を座標軸方向にするように合同変換を行うと立体の中に埋まるのは $B', H$ だということがわかる．展開図は図のようになる．




H'
G'
F'
F
G
E'
E
B
C
A'
A
D
C'
D'