立方体の正射影

立方体を描くとき，図 1 のような図を描くことは多い．しかし，立方体や直方体がこのように見えることはありえない．とは言うものの，実際に立方体を正確に作図することは意外に難しい．そこでなるべく簡便に立方体の正射影を描くことを試みよう．

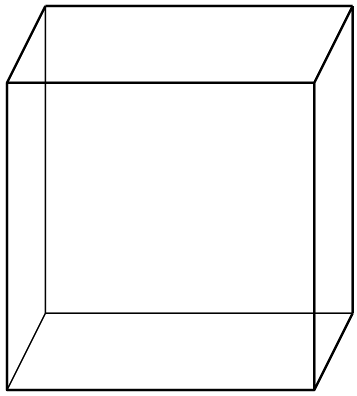

図 1

図 2 のように描くことは簡単である．しかし，これでは辺と辺の陰線が同一直線状になってしまい，味気ない．そこでこれらをずらすことを考えよう．

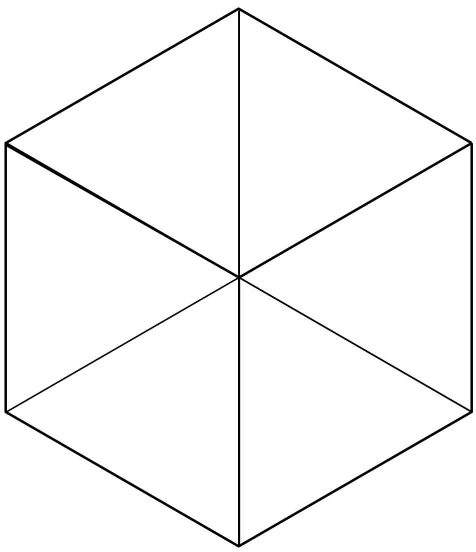

図 2

まず，立方体を面の正面から見て（つまり，正方形一つのみが見えている），そこから視線をずらし，辺の陰線と辺がちょうど同じ幅で並ぶようにする（図 3 の下の図）．

話を簡単にするために立方体の一辺の長さを $\sqrt{5}$ とする．この状態からさらに視線をずらし，少し上から見

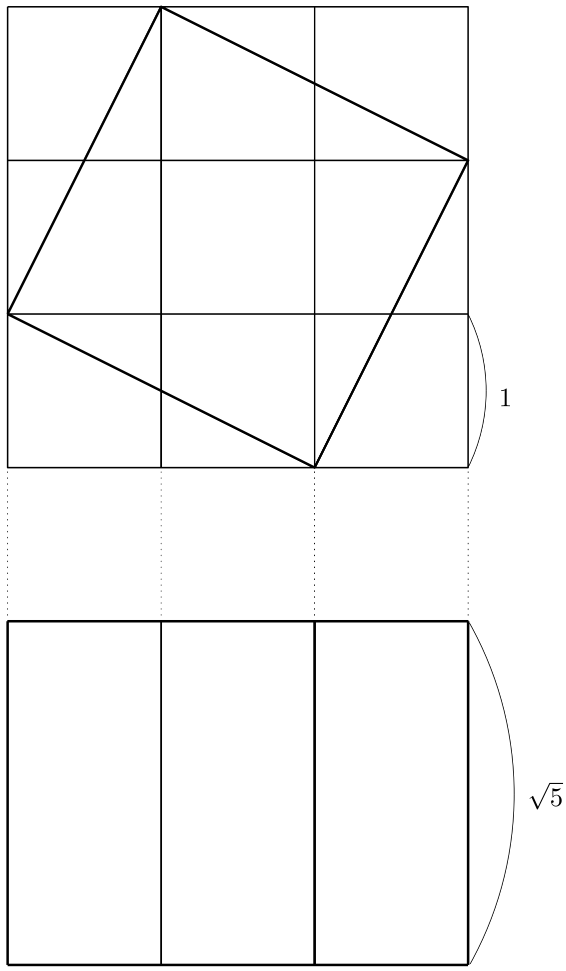

図 3

るようにする.

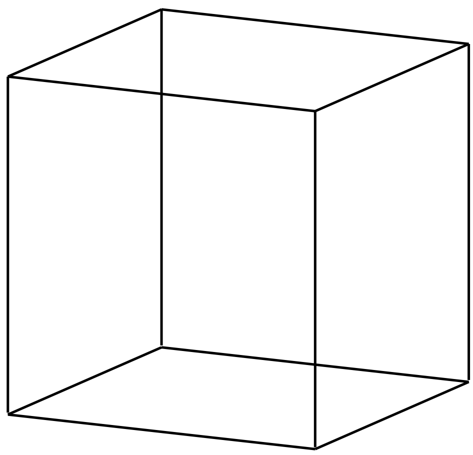

図 4

どのくらい上から見ればよいかというと，

$$\tan\theta = \frac{1}{2\sqrt{5}} \tag{1}$$

を満たす θ だけ見下ろすことにする．そうすると図 4 のようになる．なぜこの角度になるかというと，$\triangle AFC$（これは元々正三角形であったものの正射影）においてメネラウス，チェバの定理を適用すれば明らかである．つまり

$$\sqrt{5}\cos\theta : \frac{5}{3}\sin\theta = 6 : 1 \tag{2}$$

を解けば (1) を得られるわけである．

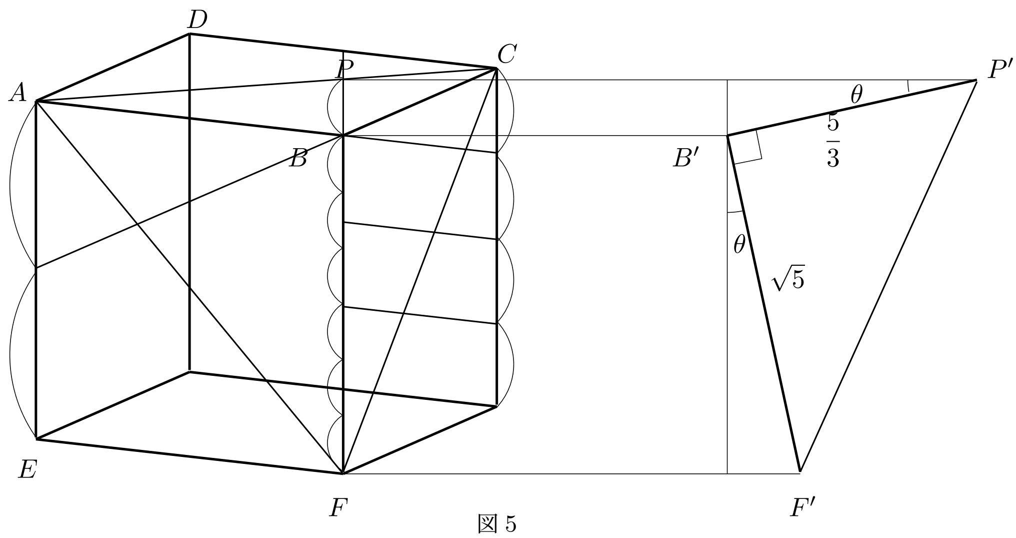

図 5

もう少し上から見てみよう．

$$\sqrt{5}\cos\theta : \frac{5}{3}\sin\theta = 9 : 2$$

を解いて，

$$\tan\theta = \frac{2}{3\sqrt{5}} \tag{3}$$

図 6 のようになる．

(3) より

$$\cos\theta = \frac{3\sqrt{5}}{7}$$

となり，さらに

$$\sqrt{5}\cos\theta = \frac{15}{7}$$

となるので，全ての数字を有理数にすることもできる．さらに全ての値を整数にすることもできる．

問題 1 立方体を平行光線にかざして影を作ったところ図 7 のようになった．x を求めよ．

［解］図 3 より立方体の一辺の長さは $7\sqrt{5}$．さらに見下ろす角度を θ とすると，

$$7\sqrt{5}\cos\theta = 15$$

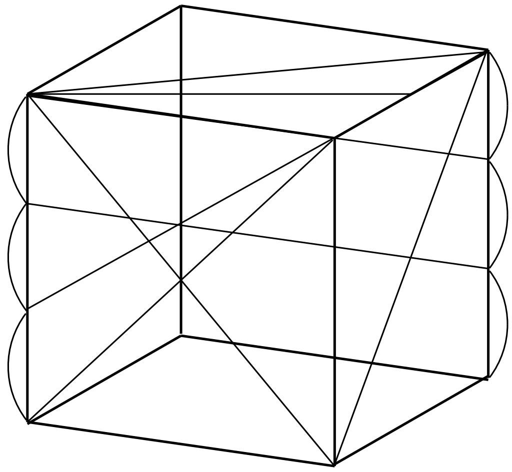

図 6

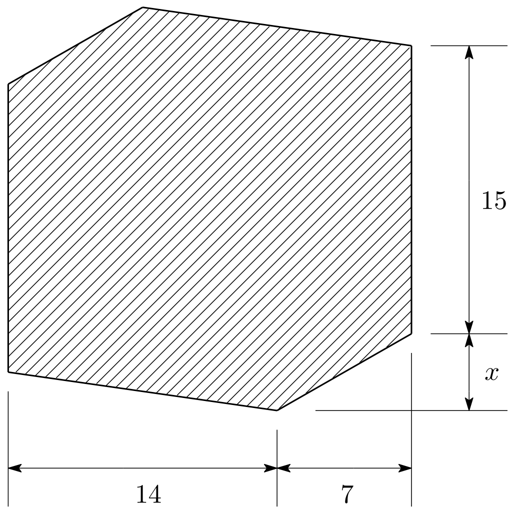

図 7

より

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{45}{49}} = \frac{2}{7}$$

$$\therefore x = 7 \times \frac{2}{7} = 4 \cdots Ans.$$

図 8 参照．さて，このように全て整数で作図できるのはどのような場合であろうか．そもそも立方体を回転したものの座標であるから，三点

$$\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

を

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

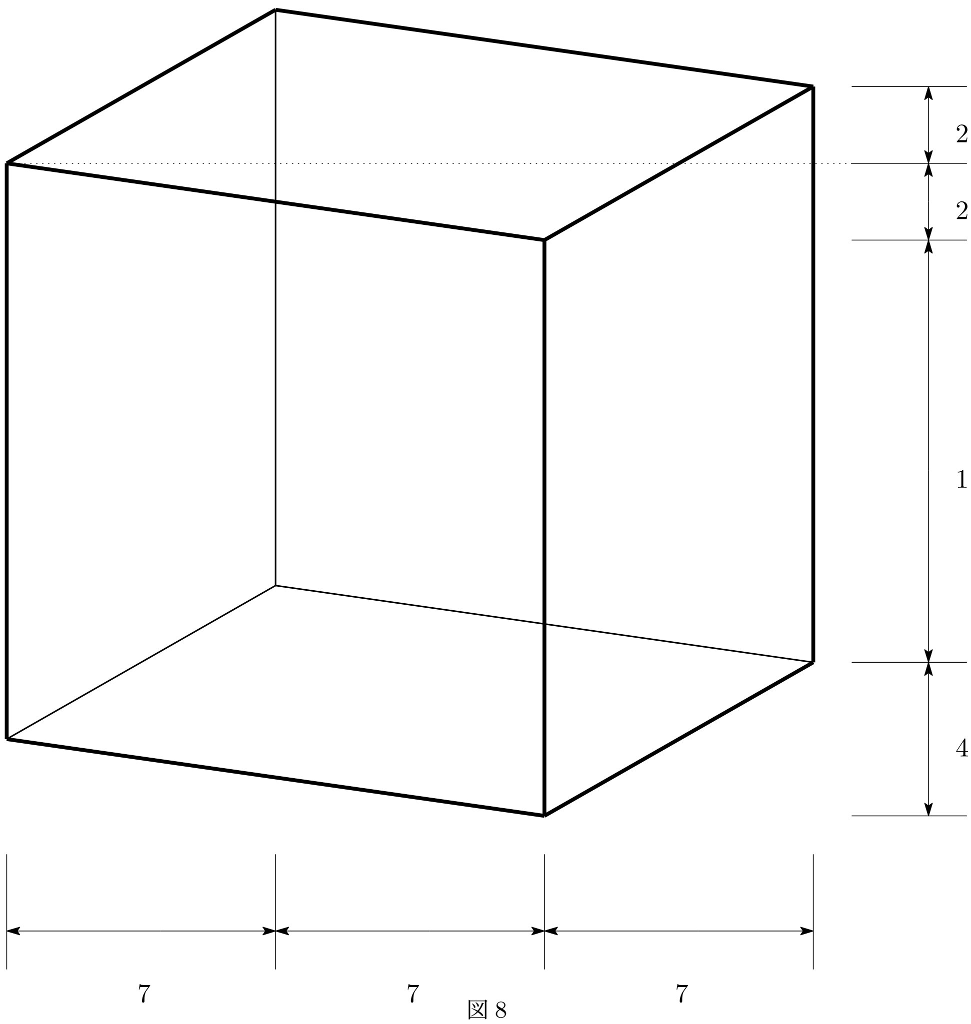

図 8

により回転し，さらに

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

により回転する．つまり

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta\cos\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

をかけてそれらの xz 座標が全て整数になればいいわけである．つまり回転後の三点の xz 座標

$$\begin{pmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta\sin\phi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a\sin\theta \\ a\cos\theta\sin\phi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a\cos\phi \end{pmatrix} \tag{4}$$

が全て整数であることが必要であり十分でもある．a が整数値をとりうる場合に限っても，$\sin\theta, \cos\theta, \sin\phi, \cos\phi$ が全て有理数であれば容易である．そうでない場合（a が無理数のとき）も問題 1 のように全てを整数にすることができる場合もある．よって，このような整数値になるような立方体の正射影は無数に作ることができる．

問題 2 (4) において

$$\sin\theta = \frac{4}{5}, \cos\theta = \frac{3}{5}, \sin\phi = \frac{3}{5}, \cos\phi = \frac{4}{5}$$

である場合について立方体の正射影を作図せよ．

［解］$a = 25$ とすると，(4) の三点は

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -20 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$

よって図 9 のようになる．

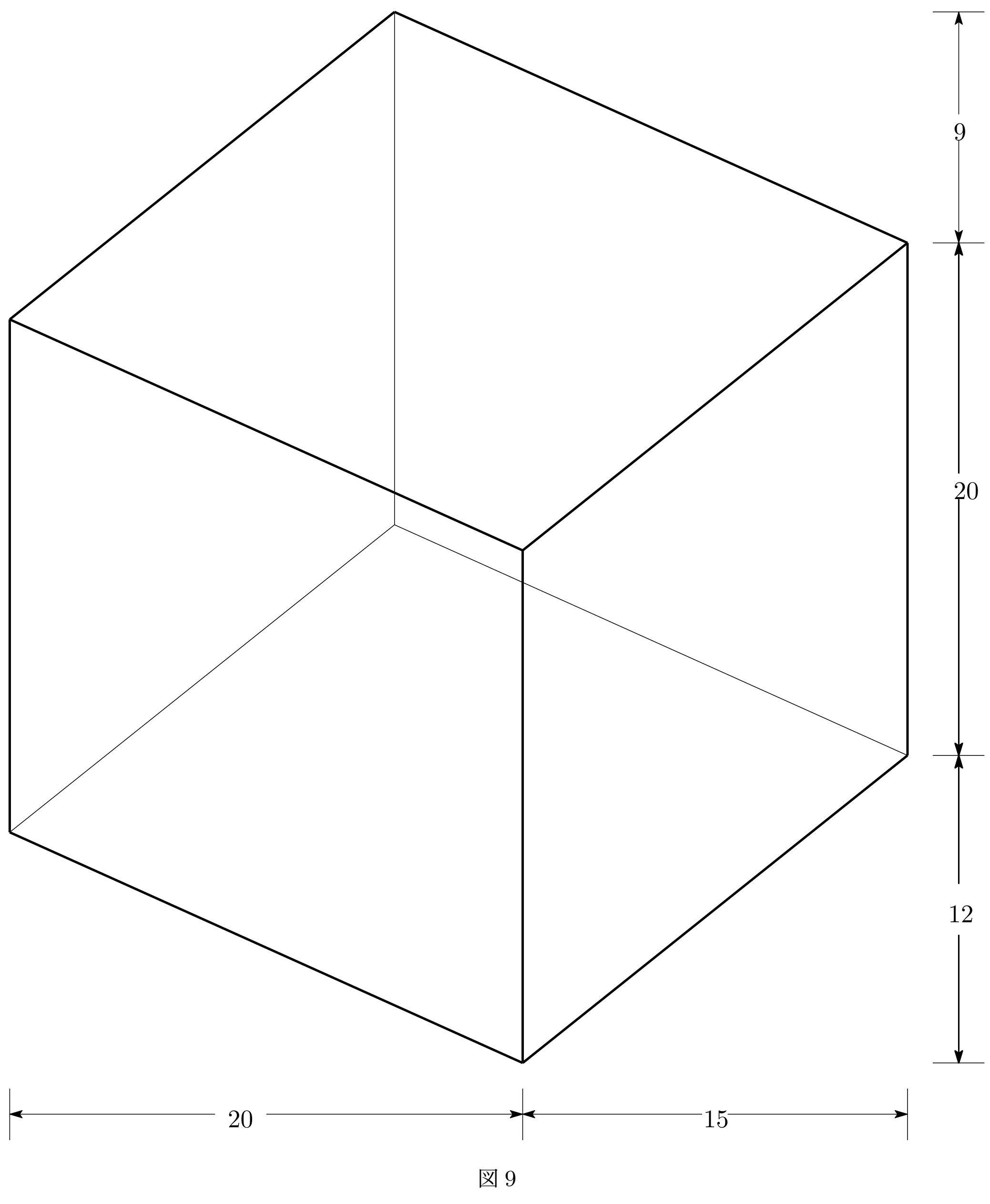

図 9

ついでに，エクセルを用いて立方体の正射影を表示するマクロを組んでみた．立体の回転をアニメーション

で表示するのは面倒な作業であるが，エクセルのグラフを用いれば簡単に実現できる．グラフの散布図（折れ線つき）で辺を表示してやればよい．簡単な 1 画面に満たないマクロでアニメーションが実現できる．（図 10）

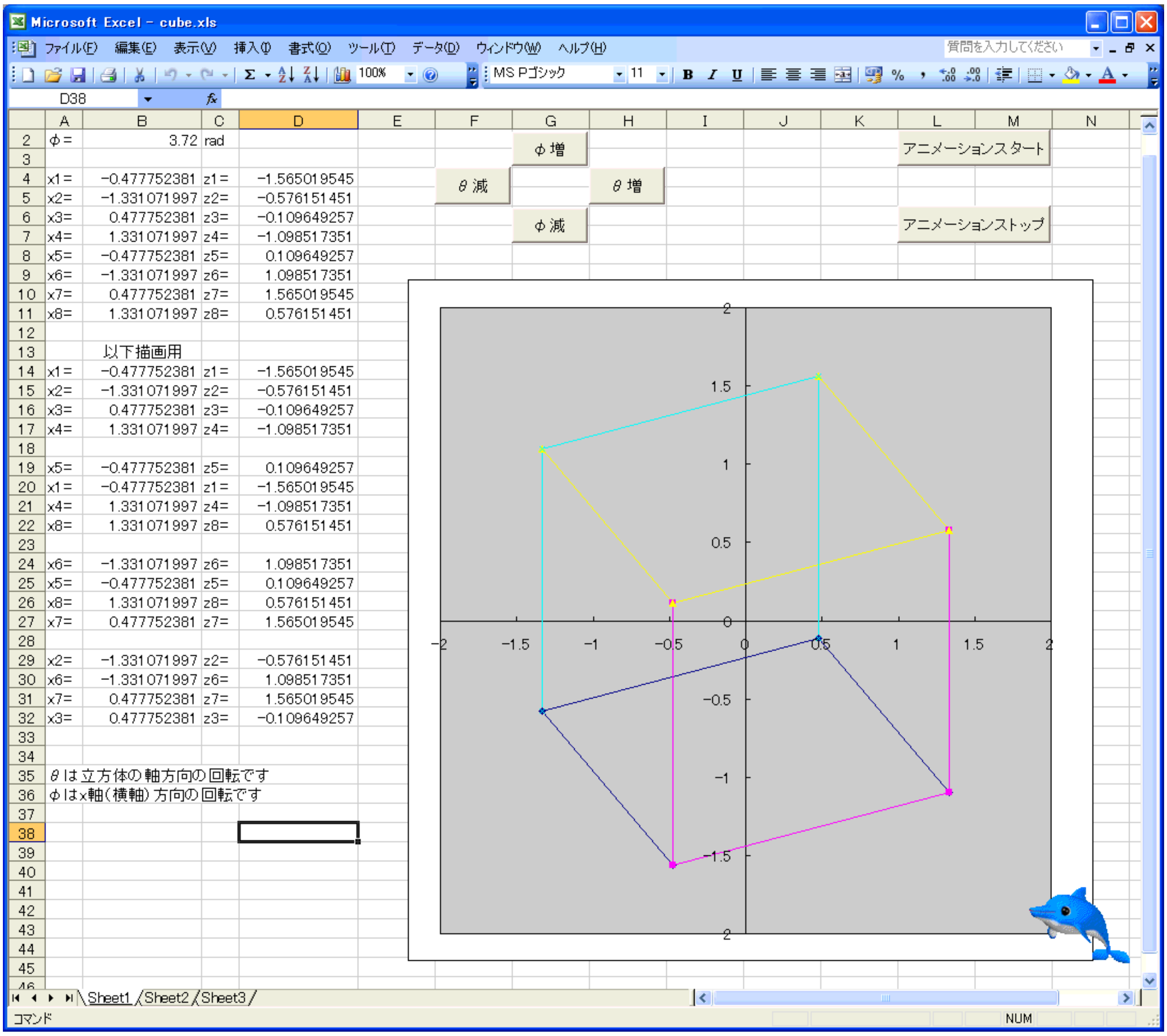

図 10