ヘロン自身によるヘロンの公式の証明

ヘロンの公式の証明はいろいろある．三角関数などを使ったものが一般的である．初等幾何だけを用いた証明もある．しかしながら，ヘロン自身によるヘロンの公式の証明はなかなか目にすることはない．この証明をみるとヘロンの豊かな才能と同時に，初等幾何の限界のようなものを感じざるを得ない．

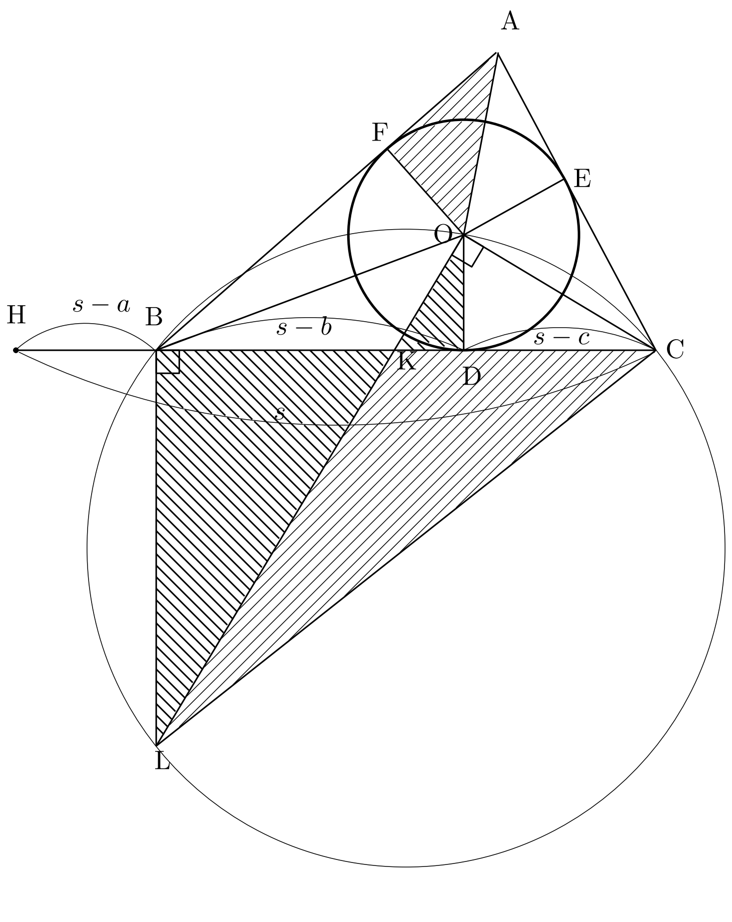
［証明］ $\triangle ABC$ の面積を S とする．またその内接円を O とし，その半径を r とする．また辺 BC, CA, AB との接点をそれぞれ D, E, F とする．

$$(a+b+c)r = 2S \tag{1}$$

辺 CB の延長上に $BH = AF$ となるように点 H をとる．当然のことながら

$$CH = \frac{a+b+c}{2} \tag{2}$$

(1),(2) より，



$$S = CH \cdot r$$
$$\therefore S^2 = CH^2 \cdot r^2$$

$$BC \perp BL, L \perp OC$$

となるように点 L をとる．点 C, O, B, L は同一円周上にある．よって，

$$\angle COB + \angle CLB = 2\angle R$$

また，

$$\angle COB + \angle AOF = 2\angle R$$

でもあるから，

$$\angle CLB = \angle AOF$$

$$\therefore \triangle CBL \sim \triangle AFO$$

$$\therefore \frac{BC}{BL} = \frac{AF}{FO} = \frac{BH}{OD}$$

$$\therefore \frac{CB}{BH} = \frac{BL}{OD}$$

また

$$\triangle ODK \sim \triangle LBK$$

より

$$\therefore \frac{BL}{OD} = \frac{BK}{KD}$$

$$\therefore \frac{CB}{BH} = \frac{BK}{KD}$$

$$\therefore \frac{CB + BH}{BH} = \frac{BK + KD}{KD}$$

$$\therefore \frac{CH}{BH} = \frac{BD}{KD}$$

$$\therefore \frac{CH^2}{BH \cdot CH} = \frac{BD \cdot DC}{KD \cdot DC}$$

ここで $\triangle ODK \sim \triangle CDO$ であるから，

$$\frac{KD}{OD} = \frac{OD}{CD}$$

$$\therefore \frac{BD \cdot DC}{KD \cdot DC} = \frac{BD \cdot DC}{OD^2}$$

$$\therefore \frac{CH^2}{BH \cdot CH} = \frac{BD \cdot DC}{OD^2} = \frac{BD \cdot DC}{r^2}$$

$$\therefore S^2 = CH^2 \cdot r^2 = CH \cdot BH \cdot BD \cdot DC$$

ここで $s = CH = \dfrac{a+b+c}{2}$ とおくと，

$$S^2 = s(s-a)(s-b)s-c)$$

$$\therefore S = \sqrt{s(s-a)(s-b)s-c)}$$

［証明おわり］

参考文献

[1] 『啓林 高数編 1992 年 6 月号』（啓林館，1992 年）