正素数角形の任意の 3 本の対角線は 頂点以外の 1 点で交わらない

問題 1 複素平面上の 2 点 α_1, α_2 を通る直線の方程式を求めよ.

［解］ $\dfrac{z-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}$ は実数なので

$$\frac{z-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}=\frac{\overline{z}-\overline{\alpha}_1}{\overline{\alpha}_2-\overline{\alpha}_1}$$

整理して

$$\begin{aligned}(\overline{\alpha}_2-\overline{\alpha}_1)(z-\alpha_1)&=(\alpha_2-\alpha_1)(\overline{z}-\overline{\alpha}_1)\\(\overline{\alpha}_2-\overline{\alpha}_1)z-\alpha_1\overline{\alpha}_2+\alpha_1\overline{\alpha}_1&=(\alpha_2-\alpha_1)\overline{z}-\overline{\alpha}_1\alpha_2+\alpha_1\overline{\alpha}_1\\(\overline{\alpha}_2-\overline{\alpha}_1)z-\alpha_1\overline{\alpha}_2&=(\alpha_2-\alpha_1)\overline{z}-\overline{\alpha}_1\alpha_2 \qquad \text{(Ans.)}\end{aligned}$$

問題 2 複素平面上の単位円上の 2 点 α_1, α_2 を通る直線の方程式を求めよ.

［解］問題 1 より

$$(\overline{\alpha}_2-\overline{\alpha}_1)z-(\alpha_2-\alpha_1)\overline{z}=\alpha_1\overline{\alpha}_2-\overline{\alpha}_1\alpha_2$$

$\overline{\alpha}_1=\dfrac{1}{\alpha_1}, \overline{\alpha}_2=\dfrac{1}{\alpha_2}$ なので

$$\left(\frac{1}{\alpha_2}-\frac{1}{\alpha_1}\right)z-(\alpha_2-\alpha_1)\overline{z}=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

両辺に $\alpha_1\alpha_2$ をかけて,

$$(\alpha_1-\alpha_2)z-\alpha_1\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)\overline{z}={\alpha_1}^2-{\alpha_2}^2$$

両辺を $\alpha_1-\alpha_2$ で割って

$$z+\alpha_1\alpha_2\overline{z}=\alpha_1+\alpha_2 \qquad \text{(Ans.)}$$

問題 3 複素平面上の単位円上に相異なる 6 点 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ がある. α_1, α_2 を通る直線, β_1, β_2 を通る直線, γ_1, γ_2 を通る直線の 3 直線が 1 点で交わる条件を求めよ.

［解］

$$\begin{cases} z+\alpha_1\alpha_2\overline{z}=\alpha_1+\alpha_2 & (1)\\ z+\beta_1\beta_2\overline{z}=\beta_1+\beta_2 & (2)\\ z+\gamma_1\gamma_2\overline{z}=\gamma_1+\gamma_2 & (3)\end{cases}$$

(1),(2) より

$$(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)\overline{z}=(\alpha_1+\alpha_2)-(\beta_1+\beta_2) \tag{4}$$

(2),(3) より

$$(\beta_1\beta_2-\gamma_1\gamma_2)\overline{z}=(\beta_1+\beta_2)-(\gamma_1+\gamma_2) \tag{5}$$

(4),(5) より $\overline{z}$ を消去して，

$$(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)(\beta_1+\beta_2-\gamma_1-\gamma_2)=(\beta_1\beta_2-\gamma_1\gamma_2)(\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2)$$

両辺に同じものがあるので省くと

$$\alpha_1\alpha_2(\beta_1+\beta_2-\gamma_1-\gamma_2)+\beta_1\beta_2(\gamma_1+\gamma_2-\alpha_1-\alpha_2)+\gamma_1\gamma_2(\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2)=0$$

もち論これは必要条件であって十分条件ではない．$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2$ がどの二つも等しくないという条件は当然である．また 3 直線が平行である場合も除かなくてはならない．たとえば，α_1,α_2 を通る直線，β_1,β_2 を通る直線が平行となるのはどのような場合だろうか．これは

$$\frac{\beta_2-\beta_1}{\alpha_2-\alpha_1}$$

が実数であることから，

$$\frac{\beta_2-\beta_1}{\alpha_2-\alpha_1}=\frac{\overline{\beta}_2-\overline{\beta}_1}{\overline{\alpha}_2-\overline{\alpha}_1}$$

$$\therefore (\beta_2-\beta_1)(\overline{\alpha}_2-\overline{\alpha}_1)=(\overline{\beta}_2-\overline{\beta}_1)(\alpha_2-\alpha_1)$$

$$\therefore (\beta_2-\beta_1)\left(\frac{1}{\alpha_2}-\frac{1}{\alpha_1}\right)=\left(\frac{1}{\beta_2}-\frac{1}{\beta_1}\right)(\alpha_2-\alpha_1)$$

$$\therefore \alpha_1\alpha_2=\beta_1\beta_2$$

よって求める条件は

$$\alpha_1\alpha_2(\beta_1+\beta_2-\gamma_1-\gamma_2)+\beta_1\beta_2(\gamma_1+\gamma_2-\alpha_1-\alpha_2)+\gamma_1\gamma_2(\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2)=0$$

であり，かつ $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2$ がどの二つも等しくなく，かつ $\alpha_1\alpha_2,\beta_1\beta_2,\gamma_1\gamma_2$ のうちどの二つも等しくないことである．　(Ans.)

問題 4 前問において $\omega=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4},\alpha_1=\omega^0=1,\alpha_2=\omega^4=-1,\beta_1=\omega,\beta_2=\omega^{-2},\gamma_1=\omega^2,\gamma_2=\omega^{-1}$ とするとき，3 直線が 1 点で交わることを確かめよ．

［解］

$$\begin{aligned}&\alpha_1\alpha_2(\beta_1+\beta_2-\gamma_1-\gamma_2)+\beta_1\beta_2(\gamma_1+\gamma_2-\alpha_1-\alpha_2)+\gamma_1\gamma_2(\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2)\\=&-(\omega+\omega^{-2}-\omega^2-\omega^{-1})+\omega^{-1}(\omega^2+\omega^{-1}-1+1)+\omega(1-1-\omega-\omega^{-2})\\=&-\omega-\omega^{-2}+\omega^2+\omega^{-1}+\omega+\omega^{-2}-\omega^2-\omega^{-1}\\=&0\end{aligned}$$

よって 3 直線は 1 点で交わる．

問題 5 前々問において $\omega=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6},\alpha_1=\omega^0=1,\alpha_2=\omega^3,\beta_1=\omega,\beta_2=\omega^5,\gamma_1=\omega^2,\gamma_2=\omega^{-2}$ とするとき，3 直線が 1 点で交わることを確かめよ．

［解］

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1\alpha_2(\beta_1+\beta_2-\gamma_1-\gamma_2)+\beta_1\beta_2(\gamma_1+\gamma_2-\alpha_1-\alpha_2)+\gamma_1\gamma_2(\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2)\\
=&\omega^3(\omega+\omega^5-\omega^2-\omega^{-2})+\omega^6(\omega^2+\omega^{-2}-1-\omega^3)+(1+\omega^3-\omega-\omega^5)\\
=&\omega^4+\omega^8-\omega^5-\omega+\omega^8+\omega^4-\omega^6-\omega^9+1+\omega^3-\omega-\omega^5\\
=&2(\omega+1)(\omega^8+\omega^4+1)=0
\end{aligned}
$$

よって 3 直線は 1 点で交わる．

定理 1 素数 p について

$$f(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+x^{p-3}+\cdots+1$$

は $\mathbb{Q}[x]$ 上既約な多項式である．

［証明略］別頁（ガウスの補題からアイゼンシュタインの既約判定法）参照

このように書くとものものしいが，噛み砕いていえば有理数の範囲では因数分解できないということを言っているに過ぎない．この場合整数範囲で因数分解できることと有理数範囲で因数分解できることは同値なのであるが，このことも証明する過程で出てくる．これらの証明は四則以外は使っていないので高校生でも理解できるであるが，長くなるので割愛する．

定理 2 p を素数とする．$\omega=\cos\dfrac{2\pi}{p}+i\sin\dfrac{2\pi}{p}$ とおくと，ω を解にもつ方程式 $g(x)=0(g(x)\in\mathbb{Z}[x])$ の左辺 $g(x)$ のなかで次数が最小のものは前定理の $f(x)$ の整数倍（ただし 0 を除く）のみである．

［証明］$g(\omega)=0(g(x)\in\mathbb{Q}[x])$ となる多項式全体の集合を L とする．任意の L の元の中で次数が最小のもの $h(x)$ とすると，L の任意の元 $g(x)$ は $h(x)$ で割り切れることをまず証明する．$g(x)$ が $h(x)$ で割り切れないと仮定すると，

$$g(x)=h(x)q(x)+r(x)\qquad(\deg r(x)<\deg h(x))$$

と置ける．$r(\omega)=f(\omega)-g(\omega)q(\omega)=0$ だから $r(x)\in L$ となる。ここで，$\deg r(x)<\deg h(x)$ だから仮定と矛盾し $g(x)$ は $h(x)$ で割り切れることがいえる．このことから，前定理 $f(x)$ は $h(x)$ で割り切れることがいえる．つまり

$$f(x)=h(x)q(x)$$

しかし $f(x)$ は既約とわかっているので $q(x)=k(k\in\mathbb{Q},k\neq0)$ とわかる．$\mathbb{Z}[x]$ に限定すれば

$$h(x)=mf(x)(k\in\mathbb{Z},m\neq0)$$

である．［証明おわり］

定理 3 p を奇素数とすると $z^p=1$ の任意の解を重複を許さず偶数個加えても 0 にはならない．

［証明］$\omega=\cos\dfrac{2\pi}{p}+i\sin\dfrac{2\pi}{p}$ とおくと，$z^p=1$ の任意の解は ω を用いて，

$$\omega^0=1,\omega,\omega^2,\cdots\omega^{p-1}\tag{6}$$

と書ける．したがって，$z^p=1$ の解を任意に偶数個選んで加えた有限個の和は，整数係数の ω に関する多項式になる．この多項式を $s(\omega)$ とすると $s(x)$ は $Z[x]$ の元である．

$s(\omega)=0$ と仮定すると，$s(x)\in L$ となることがいえる（L は前定理の証明の過程で出てきたものと同一.）よって $s(x)$ は $f(x)$ で割り切れる．$x^p=1$ の解は (6) が全てであるので，結局それらの有限個の和で 0 となりうるのは

$$1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{p-1}$$

のみである．つまり (6) のすべてを一つずつ加えた場合のみ 0 となる．つまり奇数個（p 個）加えた場合のみであるので，これは不可能である．以上より「$x^p=1$ の任意の解を偶数個加えても 0 にはならない」ことが示された．［証明おわり］

この定理では $x^p=1$ の任意の解を重複を許さず加えるということだったが，重複を許せばそれぞれ同数個ずつ選べば可能でる．それ以外は不可能であることがわかる．

さて，いよいよ本題である．

問題 6 正素数角形の任意の 3 本の対角線は
頂点以外の 1 点で交わらないことを証明せよ．

［証明］問題 3 の答を再掲しよう．

$$\alpha_1\alpha_2(\beta_1+\beta_2-\gamma_1-\gamma_2)+\beta_1\beta_2(\gamma_1+\gamma_2-\alpha_1-\alpha_2)+\gamma_1\gamma_2(\alpha_1+\alpha_2-\beta_1-\beta_2)=0$$

これが単位円上の 6 点を結んで 3 直線を作った場合，一点で交わる条件であった．この左辺を展開すると，12 個の単位円上の複素数の和になる．つまり簡単に書くと，

$$\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3+\cdots+\zeta_6-\zeta_7-\zeta_8-\zeta_9-\cdots-\zeta_{12} \tag{7}$$

である．正 p 角形の場合はこれらの各項は前定理の (6) のどれかである．しかし 0 になるのは $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{p-1}$ の場合のみなので, (7) が 0 になるには前半と後半ですべて打ち消しあうしかない．このような場合はあるだろうか．各点は同一でないので例えば $\alpha_1\alpha_2\beta_1=\alpha_1\alpha_2\gamma_1$ というようなことは無い．また 4 点 $\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2$ などが平行四辺形の頂点となることもないので $\alpha_1\alpha_2(\beta_1+\beta_2-\gamma_1-\gamma_2)=0$ となることもない．そうすると打ち消しあう場合は限られてくる．仮に

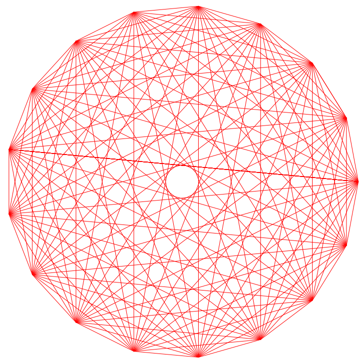
図 1

$$\alpha_1\alpha_2\beta_1=\beta_1\beta_2\alpha_1$$

とすると，$\alpha_2=\beta_2$ となりおかしい．そうすると，残りは $\alpha_1\alpha_2\beta_1=\gamma_1\gamma_2\beta_1$ と $\alpha_1\alpha_2\beta_1=\gamma_1\gamma_2\beta_2$ の場合だけである．この場合はちょっと難しい．これらは単独で成り立っても意味がなく，全体で全て打ち消しあわなくてはならないので

$$\alpha_1\alpha_2(\beta_1+\beta_2)=\gamma_1\gamma_2(\beta_1+\beta_2)$$

となる．つまり最終的に

$$\alpha_1\alpha_2=\beta_1\beta_2=\gamma_1\gamma_2$$

とならなくてはいけないが，これは前述の平行の場合である．よってこの定理は証明された．［証明終わり］

この問題の 1 点で交わらないというのは多角形の内部のことを言っているのだが，実はここまでの議論は全て直線を前提としてきているので，多角形外でも交わらない．

さてここまでは正素数角形について扱ってきたが，実は素数だけでなく正奇数角形でも同じことが成り立つ．しかしながらその証明は困難を極める．正多角形の交点の個数の問題は古来難問として知られているが，偶数角形を含めた全ての正多角形の交点の個数の問題はすでに解決している．その公式は非常に長く，驚くに値する．またこの対角線の交点の問題はこれも難問として有名なラングレーの問題と深く関係していることがわかっている．

参考文献

[1] 草場公邦『ガロワと方程式』（朝倉書店，すうがくブックス 7，1991 年）

[2] 上野健爾『代数入門 2』（岩波書店，岩波講座 現代数学への入門 7，1995 年）

[3] 斉藤浩『ラングレーの問題にトドメをさす!』（現代数学社，2009 年）

[4] 福谷敏『辺と対角線のなす角がすべての円の２ｎ等分線になる四角形について中学図形問題の教材研究：円分多項式を用いた代数的判定法の発見』（名古屋大学教育学部附属中高等学校紀要．v.48, p.131-136 ，2003 年）