# 斜楕円錐の問題

**問題 1**

$$\frac{x}{\cos\theta} = \frac{y}{\sin\theta} = \frac{z}{\sqrt{3}} \quad (z \geq 0) \tag{1}$$

で表される図形は頂角 $\dfrac{\pi}{3}$ の円錐である．この場合頂角というのは円錐が $xz$ 軸と交わる 2 直線のなす角（の小さいほう）に相当する．ちなみにこの円錐を適当な $xy$ に平行な平面で切り，展開すると，その展開図は半円となる．今この円錐を平面

$$x + \sqrt{3}z = 2 \tag{2}$$

で切った場合，これは斜楕円錐となる．この斜楕円錐の展開図の形状を調べよ．

［解］$x = \dfrac{z\cos\theta}{\sqrt{3}}$ を (2) に代入すると

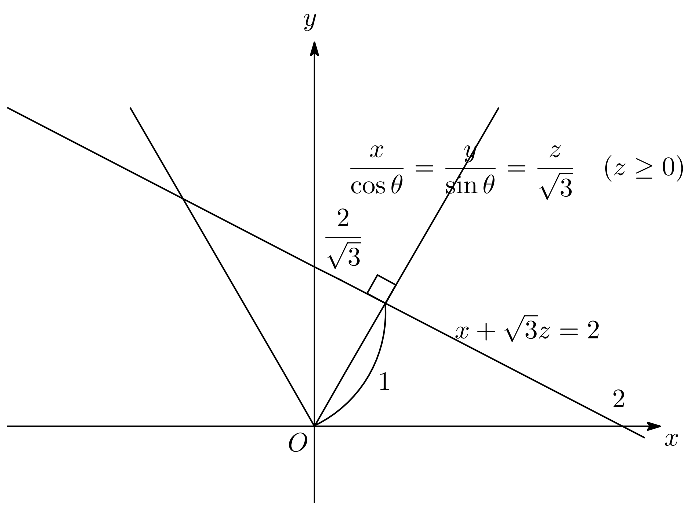


図 1

$$z = -\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{z\cos\theta}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

中略

$$z = \frac{2\sqrt{3}}{3 + \cos\theta}$$

パラメータ $\theta$ における原点からの距離を $r$ とすると

$$r = \frac{2}{\sqrt{3}}z$$

$$\therefore r = \frac{4}{3 + \cos\theta}$$

これは楕円を表している．つまり $z$ 軸方向から見た底面の形は楕円だということである．

展開図におけるパラメータを $\phi$ とすると，

$$2\phi = \theta$$

$$\therefore r = \frac{4}{\cos 2\phi + 3}$$

この式が展開図の方程式である．少し変形して

$$r = \frac{4}{\cos^2\phi + 1}$$

でもよいだろう．$xy$ 座標に変換すると，

$$\begin{aligned} r\cos^2\phi + r &= 2 \\ r^2\cos^2\phi + r^2 &= 2r \\ \therefore 2x^2 + y^2 &= 2\sqrt{x^2+y^2} \\ (2x^2+y^2)^2 &= 4(x^2+y^2) \end{aligned}$$

としてもよいだろう．一般に相似形は

$$(2x^2+y^2)^2 = a^2(x^2+y^2) \tag{3}$$

で表される．しかしこの式は $(0,0)$ でも成り立つので必要十分条件ではない．この曲線は特に名前のついた曲線ではないが（私が知らないだけかも知れない），$\sqrt{2}x = X$ と置くことにより，

$$(X^2+y^2)^2 = \frac{a^2}{2}X^2 + a^2y^2$$

と表せるので，楕円

$$\frac{2x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

の原点に関する**垂足曲線 (Pedal curve)** を $x$ 軸方向に $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍した（縮小した）図形である．垂足曲線については別頁を参照されたい．

実際に作図するときは，極座標グラフ用紙があれば極方程式から容易にプロッティングできるが，$xy$ 座標に変換してもよい．あるいは $x$ から $y$ または $y$ から $x$ の値を求めることもできる．方眼の印刷してある工作用紙ではこれが楽であろう．(3) は四次方程式であるが，$x^2, y^2$ について言えば二次方程式なので容易に解ける．

$$x^2 = \frac{a - 4y^2 \pm \sqrt{8ay^2+a^2}}{8}, y^2 = \frac{a - 4x^2 \pm \sqrt{a^2 - 4ax^2}}{2}$$

$\pm$ の $-$ の方は不適である．よって

$$x = \frac{\sqrt{a - 4y^2 + \sqrt{a^2+8ay^2}}}{2\sqrt{2}}, y = \frac{\sqrt{a - 4x^2 + \sqrt{a^2-4ax^2}}}{\sqrt{2}}$$

a=4 のときは

$$x = \frac{\sqrt{1 - y^2 + \sqrt{2\,y^2+1}}}{\sqrt{2}}, y = \sqrt{2}\sqrt{1 - x^2 + \sqrt{1-x^2}}$$

実際に模型を作るときには底面も作らないと安定しない，次に底面の形状について調べてみよう．

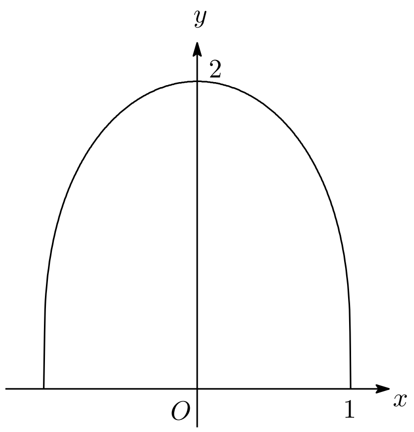


図 2

**問題 2** 問題 1 の斜楕円錘の底面の楕円の長軸の長さは $\sqrt{3}$ である．短軸の長さを求めよ．

［解］$x+\sqrt{3}z=2$ と $z=\sqrt{3}x$ の交点の $x$ 座標は $x=\dfrac{1}{2}$．同じく $x+\sqrt{3}z=2$ と $z=-\sqrt{3}x$ の交点の $x$ 座標は $x=-1$．この二つの交点の中点の $x$ 座標は $x=-\dfrac{1}{4}$．$z$ 座標は $z=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$．この $z$ 座標を (1) に代入すると，

$$-\frac{1}{4\cos\theta}=\frac{y}{\sin\theta}=\frac{3}{4}$$

$\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$ より $\sin=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ であるから，

$$y=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

つまり短軸の長さは $\sqrt{2}$ である．

**問題 3** 問題 1 の斜楕円錘の体積を求めよ．また，この斜楕円錘の相似形を作る際に，一辺の長さが 12 の正方形を用いて側面を作った場合の体積を求めよ．

［解］楕円の短軸，長軸の長さをそれぞれ $2a, 2b$ とすると，その面積は $\pi ab$ であるから，底面積は $\dfrac{\sqrt{6}}{4}\pi$．求める体積 $V$ は，

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{4}\pi\times 1=\frac{\sqrt{6}}{12}\pi$$

この斜楕円錘は側面の展開図が一辺の長さ 2 の正方形に内接する．よって一辺が 12 の正方形で作った場合，その体積は

$$\frac{\sqrt{6}}{12}\pi\times 6^3=18\sqrt{6}\pi\simeq 138.5153817$$

クリスマスが近づくと長靴の中にお菓子がたくさん入ったものが売り出される．今はこの長靴の材質はプラスチックや発砲スチロールが使われることが多いが，以前はこれはボール紙で作られていた．その長靴の足先部分が斜楕円錘になっていた．現物を見ることがもうできなくなってしまったので想像でしかないが，正方形の紙から作ることのできるこの斜楕円錘が使われていたのではないだろうか．

**問題 4** 直円錐

$$ax^2 + y^2 = z^2 \quad (a > 1) \tag{4}$$

を図 3 のように切ったときの切り口の楕円の長軸と短軸の長さの比は

$$a : \sqrt{a^2 - 1}$$

であることを証明せよ.

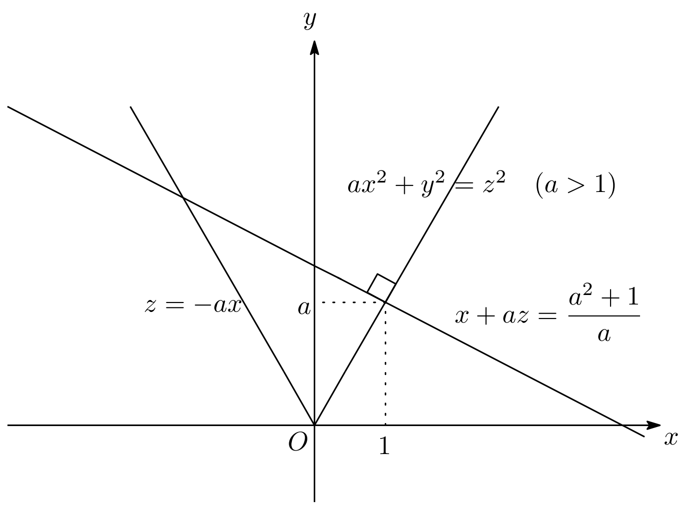


図 3

［解］

$$\begin{cases} x + az = \dfrac{a^2+1}{a} \\ z = -ax \end{cases}$$

を連立して解くと

$$(x, z) = \left( \frac{a^2+1}{1-a^2}, \frac{-a(a^2+1)}{1-a^2} \right) \tag{5}$$

$$\begin{aligned} 長軸^2 &= \left( \frac{a^2+1}{1-a^2} - 1 \right)^2 + \left( a + \frac{a(a^2+1)}{1-a^2} \right)^2 \\ &= \frac{4a^2(a^2+1)}{(1-a^2)^2} \\ \therefore 長軸 &= \frac{2a^2\sqrt{a^2+1}}{a^2-1} \end{aligned}$$

(5) と点 $(1, a)$ の中点は

$$\left( \frac{\dfrac{a^2+1}{1-a^2} + 1}{2}, \frac{a - \dfrac{-a(a^2+1)}{1-a^2}}{2} \right) = \left( \frac{1}{1-a^2}, \frac{-a^3}{1-a^2} \right)$$

これを (4) に代入すると，

$$z = \pm\sqrt{\frac{a^2+1}{a^2-1}}$$

つまり短軸の長さは

$$2\sqrt{\frac{a^2+1}{a^2-1}}$$

である．よって

$$\text{長軸} : \text{短軸} = \frac{2a^2\sqrt{a^2+1}}{a^2-1} : 2\sqrt{\frac{a^2+1}{a^2-1}} = a : \sqrt{a^2-1}$$

［証明おわり］

**問題 5**

$$\frac{x}{\cos\theta} = \frac{y}{\sin\theta} = \frac{z}{\sqrt{15}} \quad (z \geq 0) \tag{6}$$

で表される円錐を適当な $xy$ に平行な平面で切り，展開すると，その展開図は 4 分の 1 円となる．今この円錐を平面

$$x + \sqrt{15}z = 16 \tag{7}$$

で切ってできる斜楕円錘の展開図の形状を調べよ．

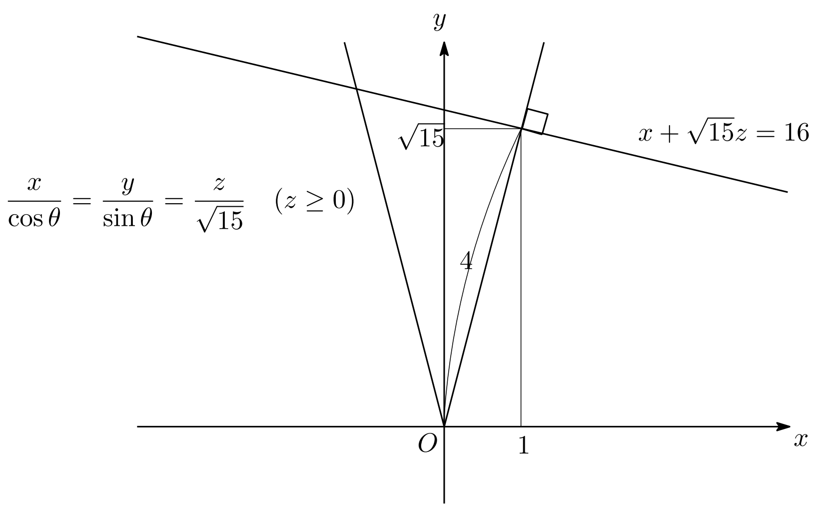


図 4

［解］$x = \dfrac{z\cos\theta}{\sqrt{15}}$ を (6) に代入すると

$$z = -\frac{1}{\sqrt{15}} \times \frac{z\cos\theta}{\sqrt{15}} + \frac{16}{\sqrt{15}}$$

中略

$$z = \frac{16\sqrt{15}}{15+\cos\theta}$$

パラメータ $\theta$ における原点からの距離を $r$ とすると

$$r = \frac{4}{\sqrt{15}} z$$
$$\therefore r = \frac{64}{15 + \cos\theta}$$

展開図におけるパラメータを $\phi$ とすると，

$$4\phi = \theta$$

$$\therefore r = \frac{64}{\cos 4\phi + 15} \cdots Ans.$$

ちなみに問題 4 の結果よりこの楕円錘の底面の楕円の長軸と短軸の比は

$$\sqrt{15} : \sqrt{14}$$

である．ほとんど円に近い．

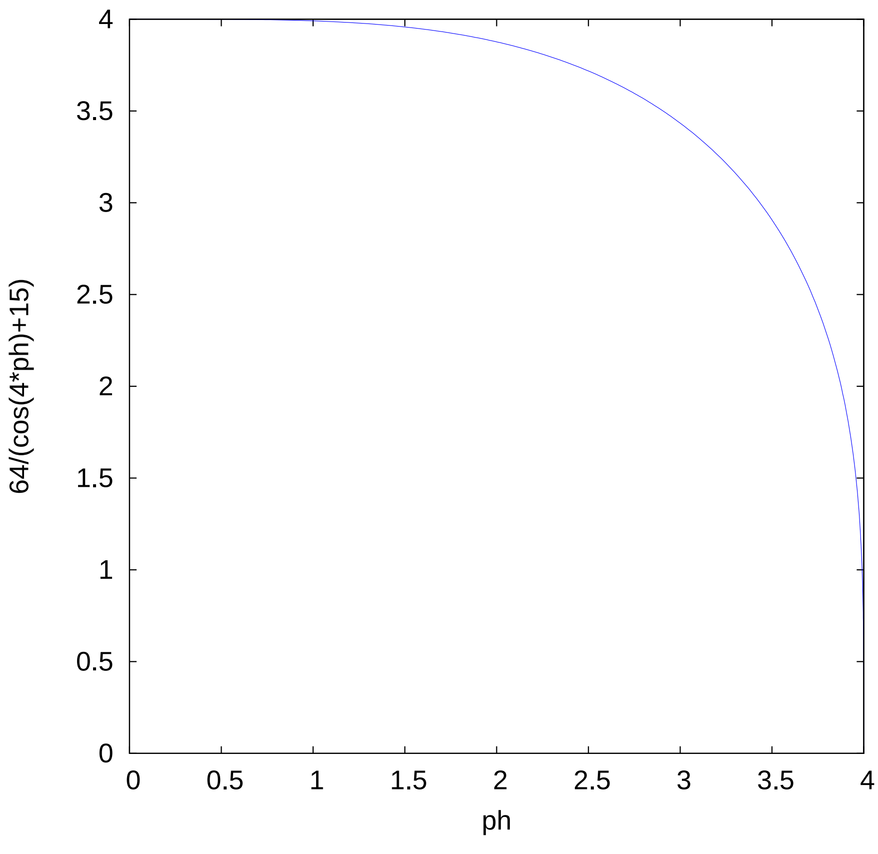


図 5

どういうわけか，WinTpic では極座標のグラフをかこうとするとエラーが出てかけない．おそらくバグと思われる[*1]．そこで wXMaxima から gnuplot を駆動して，グラフをかいてみた．簡便というわけでもない

[*1] 後ほど判明したことであるが，一度極形式以外のグラフをかいて，再編集をするとエラーがでない場合がある．しかしこれも確実な方法ではない．

が，慣れればこの方法でも困難なく良質のグラフを得られる．注意しなくてはならないことがいくつかあるので記しておく．まず，Maxima は Windows で使用する場合ユーザー名に全角文字を使っているとグラフがかけない．これを回避する方法についてはインターネット上にも記述がない．TEX をインストールするときもこの様な環境下では ghostscript のインストールで引っかかる．であるから，ユーザー名に全角文字を使わないに越したことはないのだが，後からユーザー名を変えても回避できるわけではない．仕方がないので他のユーザーでグラフをかき，そのファイルをもってくるしかない．グラフをかくにはコマンドを打ち込んでも良いが，Plot2D ボタンを押せばメニューが出てくる．極座標表示にするには Options で set polar; set zeroaxis; を選択する．このままだと横長のグラフになるのでこの Options の続きにキーボードから set size ratio 1; と打つ．また File に出力するフォルダを選択する．コマンドラインから入力すると次のようになる．

```
plot2d([64/(15+cos(4*ph))], [ph,0,1/2*%pi],
[plot_format, gnuplot],
[gnuplot_preamble, "set polar; set zeroaxis;set size ratio 1;"], [gnuplot_term, ps],
[gnuplot_out_file, "C:/Documents and Settings/All Users/Documents/plot2d.eps"])$
```

この楕円錐もまた正方形の型紙から切り取ることができる．一辺の長さが 12 の正方形の紙を使ってこの斜楕円錐を作った場合の体積を求めてみよう．

**問題 6** 問題 5 の楕円錐の相似形で，円錐の高さを 12 とした場合の体積を求めよ．

［解］求める体積 $V$ は

$$V = \frac{1}{3}\pi \times \frac{6\sqrt{14}}{7} \times \frac{6\sqrt{15}}{7} \times 12 = \frac{2^5 \cdot 3^2\sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}\pi}{7^2} \simeq 133.79068\cdots Ans.$$

問題 3 の体積と比べて小さいのは当たり前としても，それほど差がないことに驚かされる．