双曲線

定義 1 2 次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R^2}$ 上で，ある 2 点 F, F' からの距離の差が一定であるような曲線を**双曲線**（そうきょくせん, hyperbola）と呼び，この F, F' を双曲線の焦点と呼ぶ.

定理 1

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

で表される曲線は双曲線である.

[証明]　2 点 F, F' の座標をそれぞれ，$(c, 0), (-c, 0)$，点 P の座標を (x, y) とし，P から F, F' までの距離の差を $2a(0 < a < c)$ とすれば,

$$F'P - FP = \pm 2a \tag{1}$$

$$FP = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$F'P = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

であるから,(1) から

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

これから移項して得られる式

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \pm 2a$$

の両辺を 2 乗して整理すると,

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = -a^2 - cx$$

ふたたび両辺を 2 乗すると,

$$a^2 \left\{(x+c)^2 + y^2\right\} = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

この両辺を $a^2(a^2 - c^2)$ で割って,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

ここで $0 < a < c$ であるから,

$$c^2 - a^2 = b^2 \qquad (b > 0)$$

とおけば,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{2}$$

逆に，方程式 (2) をみたす点 $P(x,y)$ については，$F'P-FP=\pm 2a$ がなりたつことが証明される．

[証明終わり]

定義 2 方程式 (2) を双曲線の標準形と呼ぶ.

双曲線の方程式の標準形

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

双曲線の標準形は左辺を因数分解して,

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=1$$

とあらわすこともできる.

問題 1 曲線

$$xy=1 \tag{3}$$

は双曲線であることを示せ.

[解]　合同変換

$$(X,Y)\xrightarrow{\frac{\pi}{4}\text{だけ右に回転}}(x,y)$$

を考えると,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \tag{4}$$

(3) に (17) を代入して,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(X-Y)(X+Y)=1$$

$$\frac{x^2}{\sqrt{2}}-\frac{y^2}{\sqrt{2}}=1 \tag{5}$$

よって，(3) は双曲線 (5) を右に (負の方向に)$\frac{\pi}{4}$ だけ回転したものである.

定理 2

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1 \tag{6}$$

で表される曲線は双曲線である.

[証明略]

(2) と (3) はたがいに**共役な双曲線**という.

定理 3 双曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{7}$$

は直線

$$y=\pm\frac{b}{a}x \tag{8}$$

を漸近線にもつ.

[証明]　(4) を y について解けば,

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} \tag{9}$$

(5) と (6) のグラフの関係をしらべる．その対称性から第 1 象限のみしらべればよい.

まず，第 1 象限で x の同じ値に対する (5),(6) 上の点の y 座標の値をそれぞれ

$$y_1=\frac{b}{a}x,\quad y_2=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\quad (a>0,b>0)$$

で表し，差 y_1-y_2 をつくれば,

$$\begin{aligned} y_1-y_2&=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\\ &=\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)\\ &=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}} \end{aligned}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}=0$$

であるから，その対称性を考えあわせると，双曲線 (4) 上の点は，$|x|$ が限りなく大きくなるにつれて二直線 (5) に限りなく近づく.　[証明終わり]

二つの漸近線の方程式をまとめると,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \tag{10}$$

あるいは,

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=0$$

と表すことができる.

定理 4

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}=1 \tag{11}$$

で表される曲線は双曲線であり，その漸近線は

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}-\frac{(y-q)^2}{b^2}=0 \tag{12}$$

である.

[証明略] これは標準形の双曲線 (7) を x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動したものである．同様に (12) は漸近線 (10) を同じだけ平行移動したものである．また (11), (12) はそれぞれ

$$\left(\frac{x-p}{a}+\frac{y-q}{b}\right)\left(\frac{x-p}{a}-\frac{y-q}{b}\right)=1 \tag{13}$$

$$\left(\frac{x-p}{a}+\frac{y-q}{b}\right)\left(\frac{x-p}{a}-\frac{y-q}{b}\right)=0 \tag{14}$$

となる．$\dfrac{1}{a}=A, \dfrac{1}{b}=B, -\dfrac{p}{a}-\dfrac{q}{b}=C, -\dfrac{p}{a}+\dfrac{q}{b}=D$ とおくと，(13)(14) はそれぞれ

$$(Ax+By+C)(Ax-By+D)=1 \tag{15}$$

$$(Ax+By+C)(Ax-By+D)=0 \tag{16}$$

とかける．逆に

$$(Ax+By+C)(Ax-By+D)=0$$

を漸近線にもつ双曲線は (15) だけではなく．

$$(Ax+By+C)(Ax-By+D)=k$$

とかける．k の絶対値が同じで符号が異なる場合は，たがいに共役な双曲線となる．

定理 5 1 点で交わる 2 直線 $ax+by+c=0, a'x+b'y+c'=0$ を漸近線とする双曲線は

$$(ax+by+c)(a'x+b'y+c')=k$$

とかける．

[証明] ある合同変換 f があって，

$$ax+by \xrightarrow{f} Ax+BY$$

$$a'x+b'y \xrightarrow{f} lAx-lBy$$

とすることができれば，証明ができたことになる．今, 回転行列

$$F=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

を考え，

$$F\begin{pmatrix}a & a' \\ b & b'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & lA \\ B & -lB\end{pmatrix} \tag{17}$$

となる A が存在するかどうかしらべる．(17) より，

$$\begin{cases} a\cos\theta+b\sin\theta=A & (18) \\ a'\cos\theta+b'\sin\theta=lA & (19) \\ -a\sin\theta+b\cos\theta=B & (20) \\ -a'\sin\theta+b'\cos\theta=-lB & (21) \end{cases}$$

(18),(19) より

$$\tan\theta=-\frac{la-a'}{lb-b'} \tag{22}$$

(20),(21) より

$$\tan\theta = -\frac{lb+b'}{la+a'} \tag{23}$$

(22),(23) より

$$l = \pm\frac{a'^2+b'^2}{a^2+b^2} \tag{24}$$

(23),(24) より

$$\begin{aligned}\tan\theta &= -\frac{a'^2b+bb'^2+a^2b'+b^2b'}{aa'^2+ab'^2+a^2a'+a'b^2} \\ &= \frac{\begin{pmatrix}a'^2+b'^2 & a^2+b^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b \\ b'\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}a'^2+b'^2 & a^2+b^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a \\ a'\end{pmatrix}}\end{aligned} \tag{25}$$

(24) の符号が負の場合については省略する．(25) を満たす θ について F が存在する．よって題意は証明された．