いろいろな平均

普通平均と言ったら，相加平均のことを指す．しかし平均にもいろいろ種類がある．相乗平均や調和平均というのもがそれである．

相加平均や相乗平均の定義は省略して．調和平均はどういうものなのか調べてみよう．定義は，

調和数列の連続する 3 項を a, x, b とする．このとき x を a, b の調和平均と呼ぶ

といったところである．調和数列とは，各項を逆数にすると，等差数列になるような数列のことで，たとえば，

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$$

などを言う．

では上の定義で x を a, b で表すとどうなるだろうか．数列 $\frac{1}{a}, \frac{1}{x}, \frac{1}{b}$ は等差数列であるから，$\frac{1}{x}$ は $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ の相加平均．つまり

$$\frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$$

である．これを計算すると，

$$\boxed{x = \frac{2ab}{a+b}}$$

という公式ができる．調和平均は日常ほとんど顔を出すことはないが，$a\Omega$ と $b\Omega$ の並列抵抗を，合成抵抗値を変えずに，2 個の $x\Omega$ の並列抵抗に置き換える（下図）などというのが，これに相当する．相乗平均も日常

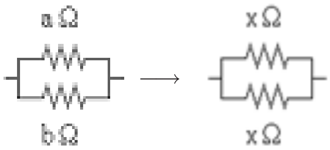

図 1

お目にかかることはない．あえて例示するとすれば「2 辺が a, b である長方形と等しい面積をもつ正方形の 1 辺の長さ」といったところだろうか．

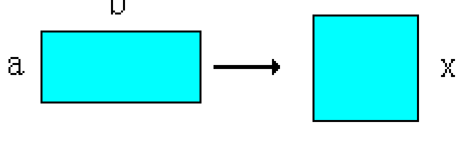

図 2

相加平均 $\geqq$ 相乗平均

ということはよく知られているが，調和平均はどうなのであろうか．調和平均と相乗平均の大小を調べてみよう．これから出てくる数はすべて正とする．

$$(\text{相乗平均})^2-(\text{調和平均})^2=ab-\left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2=(\text{中略})=\frac{ab(a-b)^2}{(a+b)^2}\geqq 0$$

$$\sqrt{ab}\geqq\frac{2ab}{a+b}(\text{ただし }a>0,\ b>0,\ \text{等号成立は }a=b)$$

つまり

相加平均 $\geqq$ 相乗平均 $\geqq$ 調和平均

このように連続する数列の中項を平均と考えると，色々な種類の平均が考えられる．たとえば平方数列の中項を平方平均と呼ぶことにしよう．

ここで，数列

$$a,x,b$$

は,

$$4,9,16$$

などの数列だする．つまり,

$$\sqrt{x}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$$

$$\therefore x=\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{4}$$

で表される．展開すると,

$$\therefore x=\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{4}$$

であるから，**相加平均 $\geqq$ 相乗平均**を駆使すると,

$$\frac{a+b}{2}=\frac{a+b+a+b}{4}\geqq\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{4}\geqq\frac{2\sqrt{ab}+2\sqrt{ab}}{4}=\sqrt{ab}$$

$$\therefore\frac{a+b}{2}\geqq\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{4}\geqq\sqrt{ab}\geqq x=\frac{2ab}{a+b}$$

ことばで書くと,

相加平均 $\geqq$ 平方平均 $\geqq$ 相乗平均 $\geqq$ 調和平均

（等号成立はすべて $a=b$）

という順位が確定した．

問 たとえば，$\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7}\cdots$ のような数列を平方根数列と呼ぶことにしよう．平方根数列 a,x,b の x を a,b の平方根平均と呼ぶことにする．x を a,b で表せ．

解 $x^2=\dfrac{a^2+b^2}{2}$ より，$x=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\cdots$（答）

同様に立方平均というものを考えることもできる．1,8,27 のような数列の中項のことである．

$\sqrt[3]{x}=\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{2}$ であるから $x=\dfrac{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^3}{8}$ である．これは次のように考えると，相乗平均との大小関係はすぐ求まる．

$$x=\frac{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^3}{8}\geqq\frac{\left(2\sqrt[6]{ab}\right)^3}{8}=\sqrt{ab}$$

これは，n 乗平均になっても同じことである．全部相乗平均より大きく（または等しく）なる．

立方平均と平方平均との大小関係を調べてみよう．

話を簡単にするために $A=\sqrt[6]{a},B=\sqrt[6]{b}$ ということにする．

$$\begin{aligned}&\text{平方平均}-\text{立方平均}\\ =&\frac{\left(A^3+B^3\right)^2}{4}-\frac{\left(A^2+B^2\right)^3}{8}\\ =&(\text{中略})\\ =&\frac{(A-B)^2(A^4+2A^3B+2AB^3+B^4)}{8}\geqq 0\end{aligned}$$

つまり

$$\textbf{平方平均}\geqq\textbf{立方平均}$$

である．この方法で，n 乗平均と $n+1$ 乗平均の大小関係を求めることができるが，実際は展開が繁雑になるので，ほかの方法を考えることにする．

一般に，$P>0,Q>0$ のとき

$$P\geqq Q \quad\Leftrightarrow\quad \frac{P}{Q}\geqq 1$$

であるから，

$$\frac{\left(a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}\right)^n}{2^n}\geqq\frac{\left(a^{\frac{1}{n+1}}+b^{\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1}}{2^{n+1}} \tag{1}$$

を証明する代わりに，

$$\frac{2\left(a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}\right)^n}{\left(a^{\frac{1}{n+1}}+b^{\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1}}\geqq 1$$

を証明すればいいわけである．

それから，文字が a,b の 2 つもあると，なにかと邪魔なので，1 つに減らしてみよう．

次のように考えまる．

不等式 (1) の両辺を b で割ろう．

$$\frac{\left(\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}+1\right)^{\frac{1}{n}}}{2^n}\geqq\frac{\left(\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n+1}}+1\right)^{\frac{1}{n+1}}}{2^{n+1}}$$

となるので，この $\dfrac{a}{b}$ を x に置き換えて，

$$\frac{\left(x^{\frac{1}{n}}+1\right)^{\frac{1}{n}}}{2^n} \geqq \frac{\left(x^{\frac{1}{n+1}}+1\right)^{\frac{1}{n+1}}}{2^{n+1}}$$

と，文字が 1 つに整理された．

つまり，

$$\frac{2\left(x^{\frac{1}{n}}+1\right)^{n}}{\left(x^{\frac{1}{n+1}}+1\right)^{n+1}} \geqq 1 \tag{2}$$

を証明すればいいわけである．しかしながらこうしてもなお計算は繁雑で，

$$y=\frac{2\left(x^{\frac{1}{n}}+1\right)^{n}}{\left(x^{\frac{1}{n+1}}+1\right)^{n+1}} \tag{3}$$

と置いて，微分する．

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{2n\left(x^{\frac{1}{n}}+1\right)^{n-1}\times\dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\left(x^{\frac{1}{n+1}}+1\right)^{n+1}-2\left(x^{\frac{1}{n}}+1\right)^{n}(n+1)\left(x^{\frac{1}{n+1}}+1\right)^{n}\times\dfrac{1}{n+1}x^{\frac{1}{n+1}-1}}{\left(x^{\frac{1}{n+1}}+1\right)^{2(n+1)}}\\
&= \text{(中略)}\\
&= \frac{2\left(x^{\frac{1}{n}}+1\right)^{n-1}x^{-1}x^{\frac{1}{n+1}}\left(x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right)}{\left(x^{\frac{1}{n+1}}+1\right)^{n+2}}
\end{aligned}$$

上の式の，分子の一番最後のかっこの中以外は全部正である．そのかっこの中を調べると，$x^{\frac{1}{n(n+1)}}$ は単調に増加し，$0<x<1$ のとき $x^{\frac{1}{n(n+1)}}<1$ で，$x>1$ のとき $x^{\frac{1}{n(n+1)}}>1$ であるから，$x=1$ のとき y は極小値を持つ．その極小値は (3) 式に代入すれば 1 であることはすぐ求まる．

よって (2) は証明された．つまり，次のような順位が確定した．

$$\frac{a+b}{2} \geqq \frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{4} \geqq \frac{\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)^3}{8} \geqq \cdots \geqq \frac{\left(a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}\right)^n}{2^n} \geqq \frac{\left(a^{\frac{1}{n+1}}+b^{\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1}}{2^{n+1}} \geqq \cdots \geqq \sqrt{ab}$$

ここまでは自然数 n についての n 乗平均であったが，実数に拡張する事はそれほど困難ではない．つまり式 (2) において，n を実数として，$n+1$ を実数 m に置き換えると，

$$\frac{2^{m-n}\left(x^{\frac{1}{n}}+1\right)^{n}}{\left(x^{\frac{1}{m}}+1\right)^{m}} \geqq 1 \quad (x>0, m>n>0) \tag{4}$$

となる．この不等式を証明してみよう．(4) 左辺を y と置くと，

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{2^{m-n}\left\{n\left(x^{\frac{1}{n}}+1\right)^{n-1}\times\dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\left(x^{\frac{1}{m}}+1\right)^{m}-\left(x^{\frac{1}{n}}+1\right)^{n}m\left(x^{\frac{1}{m}}+1\right)^{m-1}\times\dfrac{1}{m}x^{\frac{1}{m}-1}\right\}}{\left(x^{\frac{1}{m}}+1\right)^{2m}} \\
&= \text{(中略)} \\
&= \frac{2^{m-n}\left(x^{\frac{1}{n}}+1\right)^{n-1}x^{-1}x^{\frac{1}{m}}\left(x^{\frac{m-n}{mn}}-1\right)}{\left(x^{\frac{1}{m}}+1\right)^{m+1}} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

$0<x<1$ のとき $x^{\frac{m-n}{mn}}<1$ で，$x>1$ のとき $x^{\frac{m-n}{mn}}>1$ なので，$x=1$ のとき y は極小値を持つ．その極小値はやはり 1 である．よって (4) は証明された．

それでは，$m<n<0$ のときはどうだろう．(5) にいたるまでの計算はまったく同じなので，y' の符号だけ調べればよい．

$0<x<1$ のとき $x^{\frac{m-n}{mn}}>1$ で，$x>1$ のとき $x^{\frac{m-n}{mn}}<1$ なので，$x=1$ で極大値 1 をもつ．

$$
\therefore\quad \frac{2^{m-n}\left(x^{\frac{1}{n}}+1\right)^{n}}{\left(x^{\frac{1}{m}}+1\right)^{m}} \leqq 1 \quad (x>0, m<n<0) \qquad (6)
$$

ここまでの結果を整数だけに限って表すと，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\left(a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}\right)^{n}}{2^{n}} \geqq \frac{\left(a^{\frac{1}{n+1}}+b^{\frac{1}{n+1}}\right)^{n+1}}{2^{n+1}} \geqq \cdots \geqq \sqrt{ab} \geqq \cdots \\
&\qquad \geqq \frac{\left(a^{-\frac{1}{n+1}}+b^{-\frac{1}{n+1}}\right)^{-(n+1)}}{2^{-(n+1)}} \geqq \frac{\left(a^{-\frac{1}{n}}+b^{-\frac{1}{n}}\right)^{-n}}{2^{-n}}
\end{aligned}
$$

ただし $n>0$

この不等式の中には，今まで計算してきた，いろいろな平均が全て含まれる．例えば調和平均は不等式の最右辺の n が 1 のときである．もちろんこれは，とびとびの値の整数だけでなく，実数についても成り立つ．平方根平均は最左辺の n が $\dfrac{1}{2}$ のときである．それから，この長い不等式の両側は一体どうなっているかというと，あとで述べるが，左端は a と b のうち大きい方へ，右端は a と b のうち小さい方へ近づく．

さて平均の話はこれでほぼ終わりであるが，ついでにもう少し深入りしてみよう．2 数の平均は一般に $\dfrac{\left(a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}\right)^{n}}{2^{n}}$ で表すことができるが，以前やったのと同じような手法により，$\dfrac{\left(x^{\frac{1}{n}}+1\right)^{n}}{2^{n}}$ としても大して不都合は起こらない．これを x，n の関数と考えて調べてみよう．

$$
f(x,n)=\frac{\left(x^{\frac{1}{n}}+1\right)^{n}}{2^{n}}
$$

とおくと，次の計算を待つまでもなく，$f(x,n)$ は x についての増加関数である．

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}f(x,n) &= \frac{n\left(x^{\frac{1}{n}}+1\right)^{n-1}\times\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}}{2^n}\\ &= \frac{\left(x^{\frac{1}{n}}+1\right)^{n-1}x^{\frac{1-n}{n}}}{2^n}\\ &= \frac{\left(x^{\frac{1}{n}}+1\right)^{n-1}\left(x^{-\frac{1}{n}}\right)^{n-1}}{2^n}\\ &= \frac{\left(1+x^{-\frac{1}{n}}\right)^{n-1}}{2^n}>0\end{aligned}$$

そして (4),(6) より，n についてみると，$f(x,n)$ は減少関数．それから，$n>0$ のとき $f(x,n)$ は下に有界，$n<0$ のとき上に有界なので，$\lim_{n\to\infty}f(x,n)$ と $\lim_{n\to-\infty}f(x,n)$ はともに収束する．しかも今までの話の流れから，その極限は $\sqrt{x}$ であろうことは，容易に想像できる．以下

$$\lim_{n\to\infty}f(x,n)=\sqrt{x}$$

の証明をしよう．

$$y=\lim_{n\to\infty}\frac{(x^{\frac{1}{n}}+1)^n}{2^n}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n(x^{\frac{1}{n}}+1)^{n-1}\times\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}}{2^n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(x^{\frac{1}{n}}+1)^{n-1}x^{\frac{1}{n}}}{2^nx}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(x^{\frac{1}{n}}+1)^nx^{\frac{1}{n}}}{2^nx(x^{\frac{1}{n}}+1)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{(x^{\frac{1}{n}}+1)^n}{2^n}\lim_{n\to\infty}\frac{x^{\frac{1}{n}}}{x(x^{\frac{1}{n}}+1)}\\ &= \frac{y}{2x}\end{aligned}$$

微分方程式を解いて，

$$2\log|y|=\log|x|+C$$

$x=1$ のとき $y=1$ だから $C=0$

$$\therefore 2\log|y|=\log|x|$$

$$|y|^2=|x|$$

$x>0, y>0$ だから，

$$y=\sqrt{x}$$

[証明終わり]

同様に $\lim_{n\to-\infty} f(x,n)=\sqrt{x}$ も証明できる．
　また同様の計算によって，

$$\lim_{n\to+0} f(x,n)=MAX(x,1)$$

$$\lim_{n\to-0} f(x,n)=\min(x,1)$$

これらのことから，

$$0<a<x<b$$

である x は何らかの a,b の平均ということができる．ではその**平均の中の平均**，平均の中庸ともいうべきものは何か？ここまでの話の流れから，それは当然相乗平均ということができると思う．日頃，平均と言ったら相加平均が使われるが，それはどちらかといえば，MAX に偏ったものと言うことができる．
　関数 $f(x,n)$ は n についてみると n=0 で不連続であるので，あまり美しくない（図 3）．そこで n・，$\frac{1}{n}$ を入れ替えると，

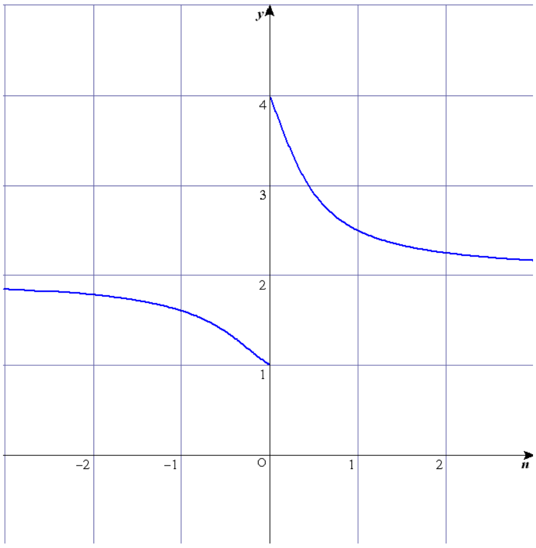

図 3　$y=\dfrac{\left(4^{\frac{1}{n}}+1\right)^n}{2^n}$

$$y=\frac{(x^n+1)^{\frac{1}{n}}}{2^n}$$

という関数ができる．この関数も $n=0$ は定義域から除かれるが，値は跳ばない．この $n=0$ のときの y の値の極限が相乗平均に相当する．
　この関数をさらに上下を対数圧縮して，ついでに x を a に，n を x にして，

$$y=\frac{1}{x}\log\frac{a^x+1}{2}$$

とすると，これは点 $\left(0,\dfrac{1}{2}\log a\right)$ について対象で，漸近線 $y=0, y=\log a$ を持ち，図 4 のようなグラフとなる．

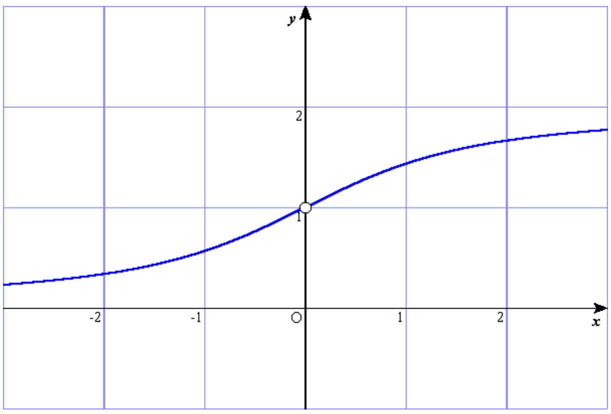

図 4　$y=\dfrac{1}{x}\log\dfrac{\left(e^2\right)^x+1}{2}$

さてここまでは，a,b2 個の要素を持つ平均を考えてきたが，さらに要素を増やすと，

$$y=\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k^n\right)^{\frac{1}{x}}$$

という関数ができる．$x=1$ のときが相加平均で，$x=-1$ のときが調和平均である．さらにこの関数が，x についての増加関数で，$\lim_{x\to0} y$ が相乗平均であろうことが予想できる．