はさみこみの原理

問題 1 自然数 n を分母とし，分子が自然数である分数を小さい方から順にかけていき，その積が初めて 1 を超えたところでやめる．最後にかけた分数を a_n とするとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

を求めよ．

［解］$a_n = x/n$ とすると，題意より

$$\frac{(x-1)!}{n^{x-1}} \leq 1 < \frac{x!}{n^x}$$

明らかに $x > n$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} x = \infty$$

$1 < \frac{x!}{n^x}$ より，両辺の対数をとり，さらに後述補題 1 を用いて

$$\begin{aligned} 0 &< \log x! - x\log n \\ &< \int_1^{x+1} \log x dx - x\log n \\ &= (x+1)\log(x+1) - x - x\log n \end{aligned}$$

$$-(x+1)\log(x+1) + x < -x\log n$$

両辺に $x\log x$ をたして，

$$x\log x - (x+1)\log(x+1) + x < x\log x - x\log nx$$

$$\therefore \frac{x\log x - (x+1)\log(x+1)}{x} + 1 < \log\frac{x}{n} \tag{1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\log x - (x+1)\log(x+1)}{x} + 1 = \lim_{x\to\infty}\left(\log\frac{x}{x+1} - \frac{\log(x+1)}{x}\right) + 1$$

$$\lim_{x\to\infty} \log\frac{x}{x+1} = 0$$

後述定理 1 系 2 より

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x+1)}{x} = 0$$

であるから

$$\lim_{x\to\infty}\left(\log\frac{x}{x+1} - \frac{\log(x+1)}{x}\right) + 1 = 1 \tag{2}$$

次に，$\frac{(x-1)!}{n^{x-1}} \leq 1$ より，両辺の対数をとり，さらに後述補題 1 を用いて

$$\begin{aligned} 0 &\geq \log(x-1)! - (x-1)\log n \\ &> \int_1^{x-1} \log x dx - (x-1)\log n \\ &= (x-1)\log(x-1) - x + 2 - (x-1)\log n \end{aligned}$$

$$-(x-1)\log(x-1) + x - 2 > -(x-1)\log n$$

両辺に $(x-1)\log x$ をたして，

$$
\begin{aligned}
(x-1)\log x-(x-1)\log(x-1)+x-2 &> (x-1)\log x-(x-1)\log n \\
\log x-\log(x-1)+\frac{x-2}{x-1} &> \log x-\log n \\
\log\frac{x}{x-1}+\frac{x-2}{x-1} &> \log\frac{x}{n} \qquad (3) \\
\lim_{x\to\infty}\left(\log\frac{x}{x-1}+\frac{x-2}{x-1}\right) &= 0+1=1 \qquad (4)
\end{aligned}
$$

(1),(2),(3),(4) より，はさみうちの原理により，

$$\lim_{x\to\infty}\log\frac{x}{n}=1$$

つまり

$$\lim_{n\to\infty}\log a_n=1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=e \quad \cdots Ans.$$

定理 1

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty \quad (n\in\mathbb{N})$$

［証明］$f(x)=e^x-x-1$ とおくと

$$f'(x)=e^x-1>0 \quad (x>0)$$

かつ $f(0)=0$ なので $x>0$ にて $f(x)>0$．よって

$$f\left(\frac{x}{n+1}\right)>0 \quad (x>0)$$

$$e^{\frac{x}{n+1}}>1+\frac{x}{n+1}$$

両辺を $n+1$ 乗して

$$e^x>\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}>\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}$$

両辺を x^n で割り，

$$\frac{e^x}{x^n}>\frac{x}{(n+1)^{n+1}}\to\infty$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^n}=\infty \quad (n\in\mathbb{N})$$

［証明おわり］

系 1

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0 \quad (n\in\mathbb{N})$$

系 2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$$

［証明］$\log x = X$ とおくと，

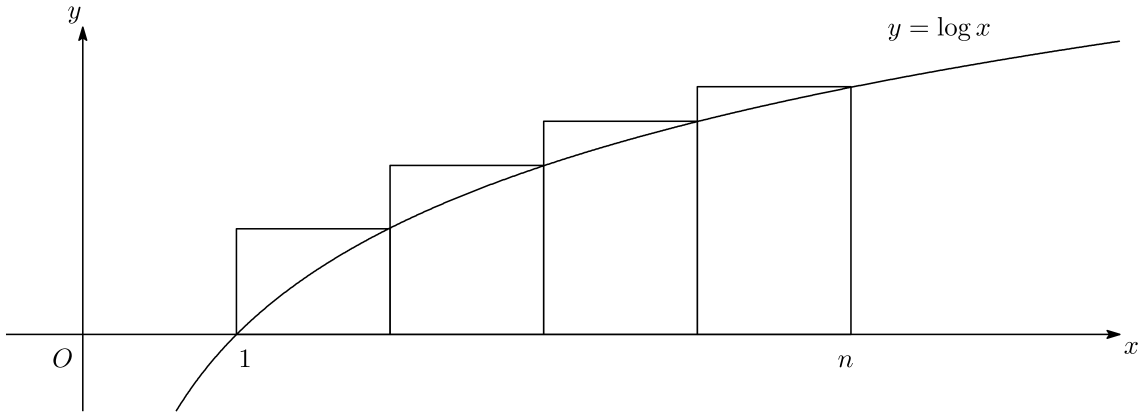
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{X\to\infty}\frac{X}{e^X}=0$$

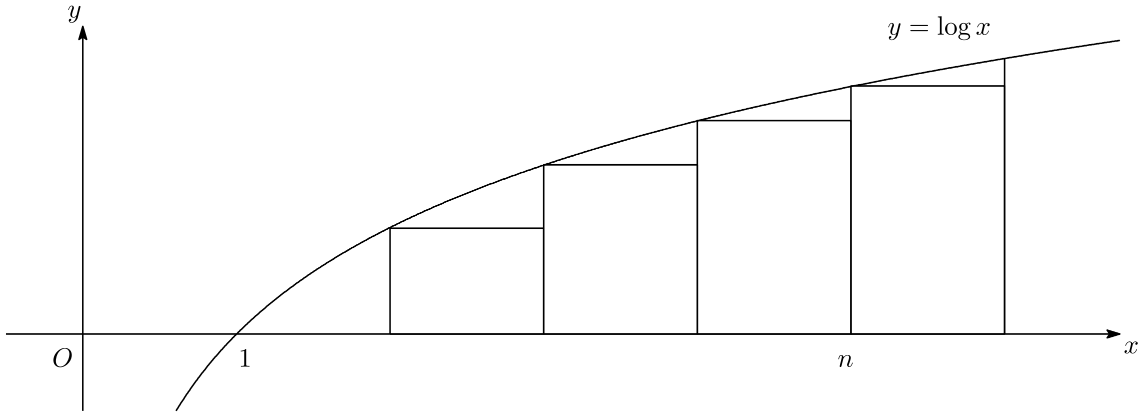
［証明おわり］

補題 1 $n\in\mathbb{N}$ のとき

$$\int_1^n \log x dx \leq \log n! < \int_1^{n+1}\log x dx$$

厳密ではないが下図より明らかである．





［等号成立は $n=1$ のとき］

［証明おわり］