不等式の問題

問題 1 正の実数 a, b, c が

$$a+b+c+abc=4$$

を満たしているとする．このとき

$$a+b+c \geq ab+bc+ca$$

を示せ.

[証明] いずれも a, b, c について対称なので,

$$a \leq b \leq c$$

と置いても一般性を失うことは無い．また

$$a+b+c=4-abc<4$$

より

$$a<\frac{4}{3}$$

である.

$$c=\frac{4-a-b}{1+ab}$$

を

$$a+b+c-ab-bc-ca$$

に代入すると,

$$\begin{aligned}
&a+b+\frac{4-a-b}{1+ab}-ab-\frac{(4-a-b)(a+b)}{1+ab}\\
=&\frac{(1+ab)(a+b-ab)+(4-a-b)(1-a-b)}{1+ab}\\
=&\frac{\left(-a^2+a+1\right)\,b^2+\left(a^2+a-4\right)\,b+a^2-4\,a+4}{1+ab}
\end{aligned}$$

ここで

$$f(b)=\left(-a^2+a+1\right)\,b^2+\left(a^2+a-4\right)\,b+a^2-4\,a+4$$

とおくと，$0<a<\dfrac{4}{3}$ において b^2 の係数は

$$-a^2+a+1>0$$

つまり 2 次関数 $f(b)$ は下に凸．また $f(b)=0$ の判別式 D は

$$\begin{aligned}
D&=\left(a^2+a-4\right)^2-4\left(-a^2+a+1\right)\left(a^2-4\,a+4\right)\\
&=(a-1)^2a(5a-8)
\end{aligned}$$

$0 < a < \dfrac{4}{3}$ において $D \leqq 0$ （等号成立は $a = 1$），つまり $f(b) \geqq 0$（等号成立は $a = b = 1$）よって

$$a + b + c - ab - bc - ca \geqq 0$$

$$a + b + c \geqq ab + bc + ca$$

（等号成立は $a = b = c = 1$）　　　　［証明おわり］

[別解]$c > 0$ のとき xy 平面上において，曲線

$$x + y + c + xyc = 4 \quad (x > 0, y > 0) \tag{1}$$

が領域

$$4 - xyc \geqq xy + yc + cx \tag{2}$$

に含まれることを示す．問題をそのままとらえれば，

$$x + y + c \geqq xy + yc + cx$$

を導くべきだが，計算が煩雑になるのを避けて，(1) の条件を加えて，(2) のようにした．前の［証明］と同じ理由により $c < \frac{4}{3}$ として問題はないので，このように仮定して証明する．

(1) より

$$\begin{aligned} x(1 + cy) + y + c &= 4 \\ cx(cy + 1) + cy + 1 + c^2 &= 4c + 1 \\ (cx + 1)(cy + 1) &= 1 + 4c - c^2 \end{aligned} \tag{3}$$

これは二本の直線 $x = -\dfrac{1}{c}, y = -\dfrac{1}{c}$ を漸近線にもつ直角双曲線の一部分（図 1 の青い曲線，ただし第 1 象限内の部分）である．(3) は座標軸と $(4 - c, 0), (0, 4 - c)$ で交わる．また第 1 象限内の頂点は

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4c - c^2}}{c}, \frac{-1 + \sqrt{1 + 4c - c^2}}{c} \right)$$

である．

また，(2) より

$$\begin{aligned} x\{(c + 1)y + c\} + cy &\leqq 4 \\ (c + 1)x\{(c + 1)y + c\} + c\{(c + 1)y + c\} &\leqq 4(c + 1) + c^2 \\ \{(c + 1)x + c\}\{(c + 1)y + c\} &\leqq (c + 2)^2 \end{aligned} \tag{4}$$

やはり，これは二本の直線 $x = -\frac{c}{c+1}, y = -\frac{c}{c+1}$ を漸近線にもつ直角双曲線の中心側の領域（図 1 の斜線部分．ただし第 1 象限内の部分で双曲線上の境界は含む）である．境界の双曲線

$$\{(c + 1)x + c\}\{(c + 1)y + c\} = (c + 2)^2 \tag{5}$$

は座標軸と $\left(\dfrac{4}{c}, 0\right), \left(0, \dfrac{4}{c}\right)$ で交わる．また (5) の第 1 象限内の頂点は

$$\left(\frac{2}{c+1}, \frac{2}{c+1}\right)$$

である．

　さて，二つの双曲線 (3),(5) の座標軸との交点の位置関係を調べてみよう．

$$\frac{4}{c} - 4 + c = \frac{(c-2)^2}{c} \geq 0$$

つまり $0 < c < \frac{4}{3}$ では (5) の交点の方が y 軸で言えば上，x 軸で言えば右にある．このことは，両双曲線の頂点の位置関係を調べれば証明に足りることを意味している．以下このことについて証明する（ただし途中の計算は長くなるので省く）．

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{c+1} \geq \frac{-1+\sqrt{1+4c-c^2}}{c} \\
\iff \quad & 2c \geq (c+1)\left(-1+\sqrt{1+4c-c^2}\right) \\
\iff \quad & 3c+1 \geq (c+1)\sqrt{1+4c-c^2} \\
\iff \quad & (3c+1)^2 \geq (c+1)^2\left(\sqrt{1+4c-c^2}\right)^2 \\
\iff \quad & (3c+1)^2 - (c+1)^2\left(\sqrt{1+4c-c^2}\right)^2 \geq 0 \\
\iff \quad & (c-1)^2 c^2 \geq 0 \qquad \text{（等号成立は } c=1\text{）}
\end{aligned}$$

つまり (2) は成り立ち，等号が成立するのは二つの双曲線の第 1 象限の頂点が重なるとき，つまり $c=1$ のとき，座標は $(x, y) = (1, 1)$ である．　［証明おわり］

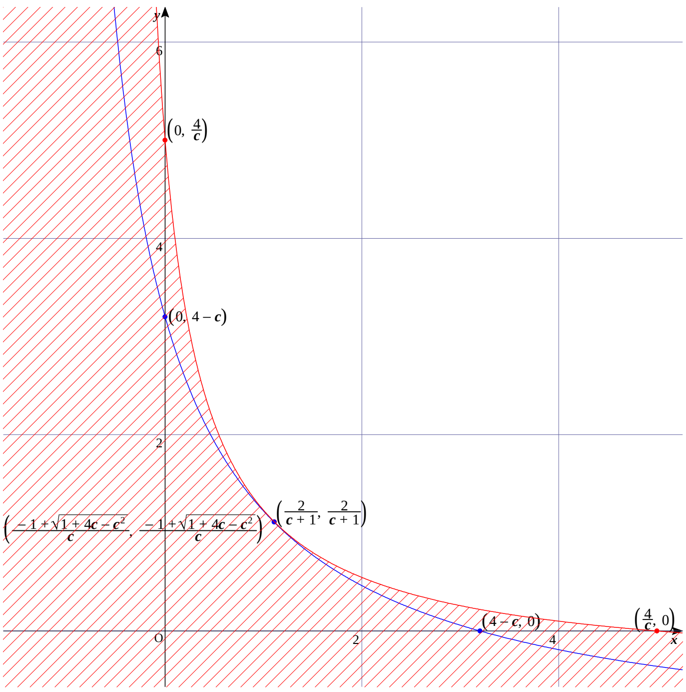

図 1

［別解 2］この解法は完全に解けたとはいいにくいが一応記述しておこう．

まず

$$3 \leq p < 4$$

を証明しておこう．$p < 4$ は明らかである．相加相乗平均より

$$\begin{aligned} p^3 &\geq 27(4-p) \\ p^3 + 27p - 108 &\geq 0 \\ (p-3)\left(p^2 + 3p + 36\right) &\geq 0 \end{aligned}$$

$p^2 + 3p + 36 > 0$ より $p \geq 3$

$a+b+c = p, ab+bc+ca = q$ とすると，この問題は 3 次方程式

$$x^3 - px^2 + qx + p - 4 = 0 \tag{6}$$

が重解を含めて正の実数解を 3 つもてば $p \geq q$ であることを証明せよという問題に等しい．

(6) の左辺を微分して，極値をとる x を求めると，

$$3x^2 - 2p + q = 0 \tag{7}$$

$$x = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 3q}}{3} \tag{8}$$

必要条件はいろいろあるが，(8) の解のうち大きい方（重解の場合はその重解）を (6) の左辺に代入して 0 以下になるという条件を用いる．その際そのまま代入してもよいのだが，その後の計算が膨大になることを恐れ，

$$d = \sqrt{p^2 - 3q}$$

ということにする．よって結論の式は $p \geq q$ から，

$$3p \geq p^2 - d^2 \tag{9}$$

になる．また，(6) の左辺にそのまま代入するのは大変なので，あらかじめ (6) の左辺を (8) の左辺で割っておき，その余りに代入することにしよう．途中の計算はサボって，

$$p^3 - 3d^2p + 27p - 2d^3 - 108 \leq 0 \tag{10}$$

p で見ても d で見ても 3 次であるので，この形を詳しく解析するのは困難である．このところがきちっと解けたといいにくいところである．コンピュータに計算させると，グラフは図 2 のようになる．確かに $3 \leq p < 4$ のとき (9) の領域は (10) の領域に含まれている．そしてその境界がちょうど重なるのは $p = 3, d = 0$ のときである．計算でこの部分の大小関係を調べることもできるのであろうが，これ以上の計算はもうごめんである．

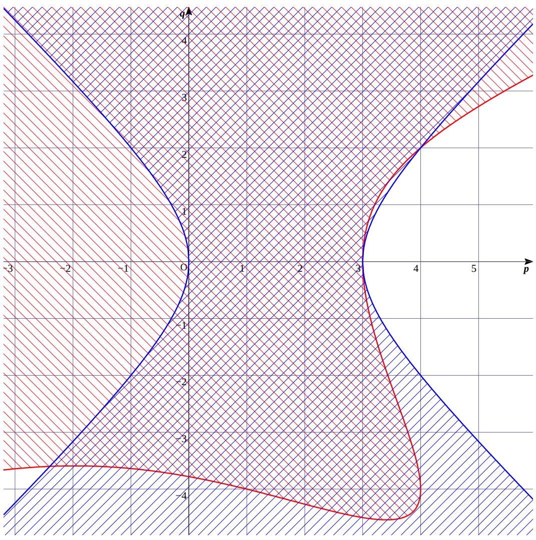

図 2