

## 4 面体の問題

次の問題は、答はほぼ見えているが、正確に解くとおそらく難問の部類に入ると思う。

問題 1 四面体の 6 辺の長さの積を  $L$ 、体積を  $V$  としたとき、 $\frac{L}{V^2}$  の最小値を求めよ。

[ 解 ] 四面体  $OABC$  において、 $OA = 1, OB = x, OC = y, \angle BOC = \alpha, \angle COA = \beta, \angle AOB = \gamma$  とする。  
余弦定理より、

$$\begin{aligned} \frac{L}{V^2} &= \frac{xy\sqrt{(x^2 - 2xy\cos\alpha + y^2)(y^2 - 2y\cos\beta + 1)(x^2 - 2x\cos\gamma + 1)}}{Kx^2y^2} \\ &= \frac{\sqrt{(x^2 - 2xy\cos\alpha + y^2)(y^2 - 2y\cos\beta + 1)(x^2 - 2x\cos\gamma + 1)}}{Kxy} \\ &= \frac{1}{K} \sqrt{\left(\frac{y}{x} - 2\cos\alpha + \frac{x}{y}\right) \left(y - 2\cos\beta + \frac{1}{y}\right) \left(x - 2\cos\gamma + \frac{1}{x}\right)} \end{aligned}$$

$K$  は  $\alpha, \beta, \gamma$  によって決まる定数である。3 つの括弧の中は正であることに注意して、

相加平均 相乗平均

より、

$$\frac{L}{V^2} \geq \frac{1}{K} \sqrt{(2 - 2\cos\alpha)(2 - 2\cos\beta)(2 - 2\cos\gamma)} \quad (1)$$

等号が成立するのは

$$x = y = 1$$

である。

次に他の 3 辺に関する条件を求めなければならない。(1) に  $x = y = 1$  を代入して  $\alpha, \beta, \gamma$  について検討すればよいのかも知れないが、 $K$  の部分が複雑な三角関数の式になってしまった(ヘロンの公式みたいな形をしている)ので方針を変更する。

$OA = OB = OC = 1$  である四面体  $OABC$  の点  $O$  から  $\triangle ABC$  に引いた垂線の足を  $H$  とすると、 $H$  は  $\triangle ABC$  の外心である。 $\triangle ABC$  の外接円の半径を

$$HA = HB = HC = l$$

三角錐の高さを

$$OH = h$$

さらに

$$BHC = 2\alpha', \angle CHA = 2\beta', \angle AHB = 2\gamma'$$

とすると、

$$V = \frac{1}{6} hl^2 (\sin 2\alpha' + \sin 2\beta' + \sin 2\gamma') = \frac{1}{6} l^2 \sqrt{1 - l^2} (\sin 2\alpha' + \sin 2\beta' + \sin 2\gamma')$$

$$L = 1^3 \times 2l \sin \alpha' \times 2l \sin \beta' \times 2l \sin \gamma' = 8l^3 \sin \alpha' \sin \beta' \sin \gamma'$$

$\frac{L}{V^2}$  とすると、やや微分しにくいので、代わりに  $\frac{V^2}{L}$  が最大となる条件をを調べることにする。

$$\frac{V^2}{L} = \frac{Pl^4(1-l^2)}{Ql^3}$$

$P, Q$  は  $\alpha', \beta', \gamma'$  によって決まる定数である。そこで新たに関数  $G$  を次のようにおく。

$$G = \frac{l^4(1-l^2)}{l^3} = l(1-l^2)$$

$\frac{dG}{dl}$  を調べることにより、 $l > 0$  では  $l = \frac{1}{\sqrt{3}}$  のとき  $G$  は最大となることがわかる。このとき  $h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$  である。

あと残ったのは、半径が  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  の円に内接する  $\triangle ABC$  の条件を求めるのみである。 $BC = a, CA = b, AB = c$  とすると、正弦定理と面積の公式から

$$\triangle ABC = \frac{abc}{4l} = \frac{\sqrt{3}abc}{4}$$

$$\therefore V = \frac{abc}{6\sqrt{2}}$$

$$\frac{L}{V^2} = \frac{72}{abc}$$

つまり  $abc$  が最大となる条件を求めればよい。 $\triangle ABC$  の内角の大きさをそれぞれ  $A, B, C$  とすると、

$$abc = 8l^3 \sin A \sin B \sin C = \frac{8}{3\sqrt{3}} \sin A \sin B \sin C$$

$$2 \sin B \sin C = \cos(B-C) - \cos(B+C) = \cos(B-C) + \cos A$$

$$\sin A \sin B \sin C = \frac{1}{2} \sin A (\cos(B-C) + \cos A) \leq \frac{1}{2} \sin A (1 + \cos A)$$

等号が成立するのは  $B = C$  のとき。

$$\frac{d}{dA} \sin A (1 + \cos A) = \cos A (1 + \cos A) - \sin^2 A = 2 \cos^2 A + \cos A - 1 = (2 \cos A - 1)(\cos A + 1)$$

$\cos A + 1 > 0$  であるから、 $\cos A = \frac{1}{2}$  (つまり  $A = \frac{\pi}{3}$ ) のとき最大値をとる。先ほどの等号成立条件とあわせて、

$$A = B = C = \frac{\pi}{3}$$

のとき、 $\sin A \sin B \sin C$  は最大値  $\frac{3\sqrt{3}}{8}$  をとる。つまり  $a = b = c = 1$  の正三角形である。

ここまでの計算は最初に  $OA = 1$  と置いた上での結果であるが、 $OA = m$  とおいた場合は、 $L$  は  $m^6$  倍となり、 $V$  は  $m^3$  倍となるだけなので、一般性を失っていない。

総合すると、正四面体は 6 辺の長さが全て等しいとき、最小値

$$\frac{L}{V^2} = 72$$

をとる。

[解 2]

[解] の冒頭で相加平均 相乗平均を用いたが、直接微分してもできないことはない。ルートは煩雑なので、全体を 2 乗する。また  $2 \cos \alpha, 2 \cos \beta, 2 \cos \gamma$  はこれも煩雑なのでそれぞれ  $a, b, c$  に書き換える ([解] で用いた  $a, b, c$  とは別である)。また定数  $K$  は増減に影響を与えないので省く。そうすると、新たな  $x, y$  に関する関数  $F$  ができ、

$$F = \frac{(x^2 - bx + 1)(y^2 - cy + 1)(y^2 - axy + x^2)}{x^2y^2}$$

これを  $x$  で微分して整理すると、

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{(y^2 - cy + 1)(bxy^2 - 2y^2 - ax^3y + axy + 2x^4 - bx^3)}{x^3y^2}$$

同様に

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{(x^2 - bx + 1)(2y^4 - axy^3 - cy^3 + cx^2y + axy - 2x^2)}{x^2y^3}$$

この二つの式の分子の左の括弧の中は辺の長さの 2 乗なので常に正としてよい。分母も同様である。

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

となる条件を調べると、

$$\begin{cases} bxy^2 - 2y^2 - ax^3y + axy + 2x^4 - bx^3 = 0 & (2) \\ 2y^4 - axy^3 - cy^3 + cx^2y + axy - 2x^2 = 0 & (3) \end{cases}$$

を解けばよいわけで、(2) - (3) より、

$$-2y^4 + axy^3 + cy^3 + bxy^2 - 2y^2 - ax^3y - cx^2y + 2x^4 - bx^3 + 2x^2 = 0$$

因数分解をして、

$$(x + y)(x - y)(2y^2 - axy - cy + 2x^2 - bx + 2) = 0$$

一番右側の括弧の中をよく見ると、

$$2y^2 - axy - cy + 2x^2 - bx + 2 = (x^2 - bx + 1) + (y^2 - cy + 1) + (x^2 - axy + y^2)$$

なので常に正と考えてよい。また  $x + y$  も同様である。よって、ここから出る必要条件是  $x = y$  のみである。

これを (2),(3) に代入すると、条件

$$x = y = 1$$

が出てくる (途中の計算は長くなるので省く)。さてこれが、求める条件の候補である。しかし最小となるかどうかはわからないのでもう少し調べてみよう。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= -\frac{2(y^2 - cy + 1)(bxy^2 - 3y^2 + axy - x^4)}{x^4y^2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= \frac{2(x^2 - bx + 1)(y^4 - cx^2y - axy + 3x^2)}{x^2y^4} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} &= \frac{2bxy^4 - 4y^4 - ax^3y^3 - bcxy^3 + axy^3 + 2cy^3 + 2cx^4y - bcx^3y + ax^3y - axy - 4x^4 + 2bx^3}{x^3y^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right]_{x=y=1} &= 2(2-c)(4-a-b) > 0 \\ \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right]_{x=y=1} &= 2(2-b)(4-a-c) > 0 \\ \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\right]_{x=y=1} &= 4b - 2bc + 4c - 8 = 2(2-b)(2-c)\end{aligned}$$

ヘッシアン  $H$  は

$$\begin{aligned}H &= 2(2-c)(4-a-b) \times 2(2-b)(4-a-c) - 4(2-b)^2(2-c)^2 \\ &= 4(2-a)(2-b)(2-c)(6-a-b-c) > 0\end{aligned}$$

つまり  $x = y = 1$  のとき極小となる．ほかに増減が変化する部分がないので最小でもある．