

## 空間図形の問題

問題 1 座標空間で

- ・点  $A$  が  $xy$  平面上の円  $x^2 + y^2 = 1$  上を動き,
  - ・点  $B$  が  $yz$  平面上の円  $y^2 + z^2 = 1$  上を動き,
  - ・点  $C$  が  $zx$  平面上の円  $z^2 + x^2 = 1$  上を動く,
- このとき,  $AB^2 + BC^2 + CA^2$  の取りうる値の範囲を求めよ.

[ 解 ] まず次の補題を示しておく

補題 1  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  について

$$-\frac{x^2 + y^2}{2} \leq xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$$

[ 証明 ]

$$\text{中辺} - \text{左辺} = \frac{(x + y)^2}{2} \geq 0$$

$$\text{左辺} - \text{中辺} = \frac{(x - y)^2}{2} \geq 0$$

$$\therefore -\frac{x^2 + y^2}{2} \leq xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$$

[ 左側の等号は  $x = -y$  のとき, 右側の等号は  $x = y$  のとき成立. ]

[ 証明おわり ]

$A(\cos a, \sin a, 0), B(0, \cos b, \sin b), A(\sin c, 0, \cos c)$  とおくと .

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 6 - 2(\sin a \cos b + \sin b \cos c + \sin c \cos a)$$

補題 1 より

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2} &= -\frac{1}{2}(\sin^2 a + \cos^2 b + \sin^2 b + \cos^2 c + \sin^2 c + \cos^2 a) \\ &\leq \sin a \cos b + \sin b \cos c + \sin c \cos a \\ &\leq \frac{1}{2}(\sin^2 a + \cos^2 b + \sin^2 b + \cos^2 c + \sin^2 c + \cos^2 a) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore 3 \leq 6 - 2(\sin a \cos b + \sin b \cos c + \sin c \cos a) \leq 9$$

$$\therefore 3 \leq AB^2 + BC^2 + CA^2 \leq 9$$

さて, 逆にこの範囲の値全てをとりうるのか, 等号成立を含めて考えてみよう.

$A(\cos a, \sin a, 0), B(0, \cos a, \sin a), A(\sin a, 0, \cos a)$  とおくと .

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 + CA^2 &= 6 - 6 \sin a \cos a \\ &= 6 - 3 \sin 2a \end{aligned}$$

$a = \pi/4, 5\pi/4$  のとき

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3$$

となる . また  $a = 3\pi/4, 7\pi/4$  のとき

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 9$$

となり , この間の値を連続的にとりうる . よって  $AB^2 + BC^2 + CA^2$  の取りうる値の範囲は

$$3 \leq AB^2 + BC^2 + CA^2 \leq 9 \cdots Ans.$$

等号が成立する条件つまり , 最大最小となる場合はこのほかにもいくつかある .

最小となる場合は全部で 8 組

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

とすると

$$A(\pm r, \pm r, 0), B(0, \pm r, \pm r), C(\pm r, 0, \pm r)$$

$$A(\mp r, \pm r, 0), B(0, \pm r, \pm r), C(\mp r, 0, \pm r)$$

$$A(\mp r, \mp r, 0), B(0, \mp r, \pm r), C(\mp r, 0, \pm r)$$

$$A(\pm r, \mp r, 0), B(0, \mp r, \pm r), C(\pm r, 0, \pm r)$$

各行は複合同順 . 最大となる場合はやはり 8 組で

$$A(\pm r, \pm r, 0), B(0, \mp r, \mp r), C(\mp r, 0, \pm r)$$

$$A(\mp r, \pm r, 0), B(0, \mp r, \mp r), C(\pm r, 0, \pm r)$$

$$A(\mp r, \mp r, 0), B(0, \pm r, \mp r), C(\pm r, 0, \pm r)$$

$$A(\pm r, \mp r, 0), B(0, \pm r, \mp r), C(\mp r, 0, \pm r)$$

で , どの場合も  $\triangle ABC$  は原点を重心とする三角形である , また平面  $ABC$  は最小となる場合の平面  $ABC$  のどれかと平行である .

