ヤコビアンと写像

領域の問題をヤコビアンを用いて解いてみる．

定理 1 (逆写像定理) $\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^2$ への写像

$$\Phi(u,v):(u,v)\to(x,y)=(x(u,v),\ y(u,v))$$

において,

(A)　$\Phi(u_0,v_0)=(x_0,y_0)$

(B)　Φ は C^1 級写像

(C)　$J_\Phi(u_0,v_0)$ が正則行列

であるならば,

点 (u_0,v_0) を含む十分小さな領域：U ,

点 (x_0,y_0) を含む十分小さな領域：X

を適当に定めれば，Φ は U から X への 1 対 1 写像となる。

問題　a,b を任意の実数とする. 点 $(\cos a\cos b,\cos 3a\cos 3b)$ の存在範囲を xy 平面上に図示せよ.

解　変数を書き換えて

$$\begin{cases} x=uv & (1)\\ y=(4u^3-3u)(4v^3-3v) & (2)\end{cases}$$

とする．uv 平面で [-1,1] × [-1,1] の正方形の領域の像を調べる．

ヤコビ行列式を計算すると

$$\frac{\partial x}{\partial u}=v,\qquad \frac{\partial x}{\partial v}=u$$
$$\frac{\partial y}{\partial u}=3(4u^2-1)(4v^3-3v),\ \frac{\partial y}{\partial v}=3(4v^2-1)(4u^3-3u)$$

より,

$$\begin{aligned}J_\Phi(u,v)&=3u(4v^2-1)(4u^3-3u)-3v(4u^2-1)(4v^3-3v)\\&=24\,u^3\,v-24\,u\,v^3\\&=24uv(u+v)(u-v)\end{aligned}$$

よって，この uv 平面上の正方形は，さらに，座標軸と $u=\pm v$ によって 8 領域に分割される．(1),(2) より

$$\Phi(-u,-v)=\Phi(u,v)$$

であることから，uv 平面上で原点対称にある点は同じ点に写る．さらに

$$\Phi(v,u)=\Phi(u,v)$$

であることから，基本領域は 2 つとわかる．その 2 つの領域を

$$0<v<u,0<u<1 \tag{3}$$
$$-u<v<0,0<u<1 \tag{4}$$

とする．

$$\varPhi(-u,v)=-\varPhi(u,v)$$

であることからこの二つの領域の像は xy 平面で原点対称である．よって (3) だけを調べてその結果を対称移動すれば (4) の像も求まる．領域 (3) について境界の行き先を調べると，

$$v=0(0\leqq u\leqq 1)\to(0,0)$$

像は原点につぶれる．

$$v=u(0\leqq u\leqq 1)\to y=x(4x-3)^2(0\leqq x\leqq 1)\tag{5}$$

$$u=1(0\leqq v\leqq 1)\to y=x(4x^2-3)(0\leqq x\leqq 1)\tag{6}$$

またその内部の点を調べると，

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\to\left(\frac{1}{2},0\right)$$

で (5)(6) により囲まれた部分に写る．よってその写像は次のようになる．

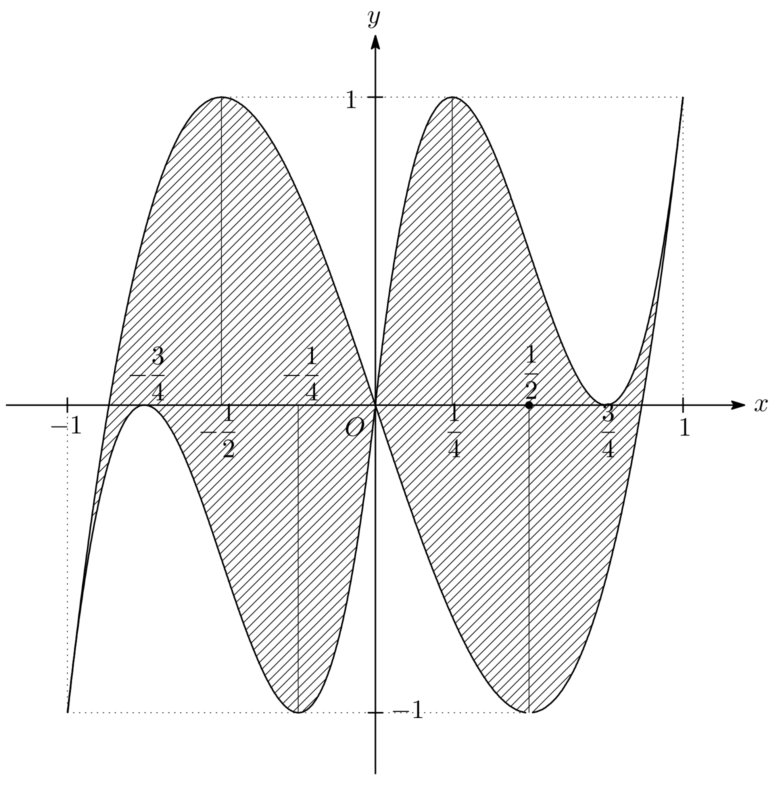

図 1

参考文献

[1] 熊原啓作『多変数の微積分』（放送大学，2003 年）