# ケーリー・ハミルトンの定理と対角行列

一般に，対角行列の積は対角行列になる．よって対角行列の $n$ 乗は対角行列になるが，その逆はどうであろうか．考察してみた．

## 0.1　二次の場合

**定理 1** 二次の正方行列 $A$ が対角行列になるための必要十分条件は $Tr(A)=0$ または $A$ が対角行列であることである．

［証明］$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと，

$$A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}$$

よって $A$ が対角行列である条件は $a+d=0$ または $b=c=0$ である．前者は $Tr(A)=0$，後者は $A$ が対角行列であることであるが対角行列であることと同値である．　［証明おわり］

$Tr(A)=0$ の場合，$A^2$ はスカラー行列になる．つまり，<u>$A^2$ がスカラー行列以外の対角行列であれば</u>，$A$ はスカラー行列以外の対角行列である．$A^2$ がスカラー行列のときは $A$ はスカラー行列の場合もあればそうでない場合もある．

次に 2 次の正方行列において，$A^n$ がスカラー行列でない対角行列であれば $A$ は対角行列といえるだろうか．

$A^n$ がスカラー行列になる場合は，たとえば回転行列（のスカラー倍），

$$A=k\begin{pmatrix} \cos\dfrac{2\pi}{n} & -\sin\dfrac{2\pi}{n} \\ \sin\dfrac{2\pi}{n} & \cos\dfrac{2\pi}{n} \end{pmatrix}$$

の場合，$A^n=k^nE$ となる．また，前述の $Tr(A)=0$ の場合も $A^{2n}$ はスカラー行列になる．

それでは $A^n$ がスカラー行列でない対角行列のときはどうであろうか．まず $A^3$ について調べてみよう．ケーリー・ハミルトンの定理

$$A^2-Tr(A)A+\det(A)E=O$$

の左辺で $A^3$ を割ることにより，

$$\begin{aligned} A^3&=(A+Tr(A))(A^2-Tr(A)A+\det(A)E)+(Tr(A)^2-\det(A))A-Tr(A)\det(A)E \\ &=\{Tr(A)^2-\det(A)\}A-Tr(A)\det(A)E \end{aligned}$$

となる．よって，$Tr(A)^2-\det(A)\neq 0$ であれば $A$ もスカラー行列以外の対角行列となる．もちろん，この場合，$A^3$ がスカラー行列であれば $A$ もスカラー行列である．

### *0.1*　二次の場合

前述の回転行列,

$$A = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3} \\ \\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$$

などは，$Tr(A)^2 - \det(A) = 0$ に相当する．

ではTr$(A)^2 - \det(A) = 0$ の場合はどのようになるであろうか．$Tr(A)^2 - \det(A) = 0$ を成分で表すと,

$$(a+d)^2 - (ad - bc) = 0$$
$$a^2 + d^2 + ad + bc = 0$$

一方,

$$\begin{aligned}
A^3 &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^3+2abc+bcd & a^2b+abd+b^2c+bd^2 \\ a^2c+bc^2+acd+cd^2 & abc+2bcd+d^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^3+2abc+bcd & b(a^2+d^2+ad+bc) \\ c(a^2+d^2+ad+bc) & abc+2bcd+d^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^3+2abc+bcd & 0 \\ 0 & abc+2bcd+d^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^3+bc(2a+d) & 0 \\ 0 & bc(a+2d)+d^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -(a+d)^3 & 0 \\ 0 & -(a+d)^3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -Tr(A)^3 & 0 \\ 0 & -Tr(A)^3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

つまり，$Tr(A)^2 - \det(A) = 0$ のとき，$A^3$ は必ずスカラー行列になる．

［例］

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 21 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & 0 \\ 0 & -27 \end{pmatrix}$$

これらのことから，$A^3$ がスカラー行列以外の対角行列であれば，$A$ もスカラー行列以外の対角行列である．

$A^4$ は，$A^4 \to A^2 \to A$ と考えることにより，同様のことが言える．$A^5$ 以上を考える前に整式の割り算をやっておこう．

**問題 1** $x^n \div (x^2 + kx + l)$ の余りを求めよ．

［解］

$$x^n = (x^2 + kx + l)Q(x) + px + q$$

とおく．$x^2 + kx + l = 0$ の 2 解を $\alpha, \beta$ とすると，上式は,

$$x^n = (x - \alpha)(x - \beta)Q(x) + px + q$$

$x = \alpha, \beta$ を代入して,

$$\alpha^n = p\alpha + q$$
$$\beta^n = p\beta + q$$

辺々を引いて，

$$\alpha^n - \beta^n = p(\alpha - \beta)$$

$\alpha \neq \beta$ のとき，

$$p = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

同様に，

$$\begin{aligned} \beta\alpha^n &= p\alpha\beta + q\beta \\ \alpha\beta^n &= p\alpha\beta + q\alpha \\ \alpha\beta^n - \beta\alpha^n &= q(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

$\alpha \neq \beta$ のとき，

$$q = \frac{\alpha\beta^n - \beta\alpha^n}{\alpha - \beta}$$

$\alpha = \beta$ のとき，

$$x^n = (x - \alpha)^2 Q(x) + p(x - \alpha) + r \tag{1}$$

とおける．$x = \alpha$ を代入して，

$$\alpha^n = r$$

(1) を微分して，

$$nx^{n-1} = 2(x - \alpha)Q(x) + (x - \alpha)^2 Q'(x) + p$$

$x = \alpha$ を代入して，

$$\begin{aligned} n\alpha^{n-1} &= p \\ r - p\alpha &= (1 - n)\alpha^n \end{aligned}$$

（答）$x^2 + kx + l = 0$ が異なる二つの解 $\alpha, \beta$ を持つとき，

$$\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}x + \frac{\alpha\beta^n - \beta\alpha^n}{\alpha - \beta}$$

重解 $\alpha$ を持つとき，

$$n\alpha^{n-1}x + (1 - n)\alpha^n$$

実はこの問題 1 は不要であった．というのは，$A^n$ はケーリー・ハミルトンの定理の式で割り算をすると，必ず，

$$A^n = pA + qE$$

となるわけで，$p = 0$ の場合は $A^n$ は必ずスカラー行列になるわけで，$A^n$ がスカラー行列以外の対角行列になるときは $p \neq 0$ であり，$A$ もスカラー行列以外の対角行列となる．

よって，次のことが言える．

**定理 2** $A$ が 2 次の正方行列の場合，$A^n$ がスカラー行列以外の対角行列であれば，$A$ はスカラー行列以外の対角行列である．$A^n$ がスカラー行列であれば，$A$ はスカラー行列または対角行列以外の行列である．

## 0.2　三次の場合

次に，$A$ が $m$ 次の対称行列の場合はどうであろうか．この場合ははっきりしたことは言えそうもない．特に $n > m$ のときはほとんど見通しもたたない．

それで，3 次の正方行列について調べてみることにする．3 次のケーリー・ハミルトンの定理は，

$$A^3 - Tr(A)A^2 + aA + bE = O \qquad (a, b \text{ は前述のもとは別})$$

とかける．$A^2$ がスカラー行列以外の対角行列のとき，$A^2 = T$ とおくと，

$$\begin{aligned} AT - Tr(A)T + aA + bE &= O \\ (T + aE)A &= Tr(A)T - bE \end{aligned}$$

$T + aE$ は $a$ の値にかかわらず，スカラー行列以外の対角行列であるから，$T + aE = T'$ とおくと，

$$T'A = Tr(A)T - bE$$

右辺は，対角行列であるから，

$$T'A = S$$

とおける．$T'$ が正則であれば，$T'$ の逆行列をかけて，

$$A = {T'}^{-1}S$$

よって，$A$ は対角行列である．ただしこの時点でスカラー行列の可能性もある．しかし，スカラー行列の $n$ 乗はスカラー行列以外の対角行列になることはないので，やはり $A$ はスカラー行列以外の対角行列だということができる．

同様にして，$A^2$ がスカラー行列のとき $A$ がスカラー行列だということもできる．

$T'$が正則でない場合は話が複雑である．ケーリー・ハミルトンの定理の 3 次の場合は，

$$A^3 - Tr(A)A^2 + \frac{1}{2}\{Tr(A)^2 - Tr(A^2)\}A - det(A)E = O$$

となるが，なかなか見通しが立たない．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & -a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + bc & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + bc \end{pmatrix}$$

のように，対角ブロックが 2 次の正方行列で，その部分のトレースが 0 になる場合は，その部分に対応する $A^2$ の対角成分が等しくなる．たとえば，次のような場合である．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

この場合は前述のケーレー・ハミルトンの定理に相当する方程式を求めると，次のようになる．

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(-1-\lambda) - (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2) = -(\lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda + 2)$$

*0.2*　三次の場合

$$
\begin{aligned}
A^3 - A^2 - 2A + 2E &= O \\
TA - T - 2A + 2E &= O \\
(T-2E)A &= T - 2E
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}
$$

これらの性質は，次のような一見簡単そうな問題でも簡単には解けないことを表している．

**問題 2** $\begin{pmatrix} 10 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & -3 & -5 \end{pmatrix} = A$ とする．

(1) $A$ の固有値・固有ベクトルを求めよ．

(2) $B^2 = A$ を満たす行列 $B$ を求めよ．

［解］(1)

$$
\begin{vmatrix} 10-\lambda & -3 & -6 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 9 & -3 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0
$$

より，

$$
\begin{aligned}
(10-\lambda)(1-\lambda)(-5-\lambda) + 54(1-\lambda) &= 0 \\
(1-\lambda)(-50-5\lambda+\lambda^2+54) &= 0 \\
(\lambda-1)^2(\lambda-4) &= 0 \\
\lambda &= 1, 4
\end{aligned}
$$

$\lambda = 1$ のとき，

$$
\begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & -3 & -6 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0,
\left( \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq 0 \right)
$$

を解く．

$$
\begin{pmatrix} 9 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 9 & -3 & -6 \end{pmatrix}
\to
\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

$$3x - y - 2z = 0$$

$$x = k, z = l$$

とすると，

$$y = 3k - 2l$$

$$
\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} (k, l \neq 0)
$$

$\lambda = 1$ に属する固有空間の基底は，

$$
\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

*0.2*　三次の場合

$\lambda = 4$ のとき,

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & 0 \\ 9 & -3 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0, \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq 0\right)$$

を解く.

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & 0 \\ 9 & -3 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (m \neq 0)$$

$\lambda = 4$ に属する固有空間の基底は,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(2) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore C^{-1} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ C^{-1}AC &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & -3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = C^{-1}B^2C = (C^{-1}BC)^2 \end{aligned}$$

*0.2*　三次の場合

たとえば $C^{-1}BC = \begin{pmatrix} \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm2 \end{pmatrix}$（複合同順ではなく，8 通りの全ての場合を表す）の場合，

$$\begin{aligned} B =& C(C^{-1}BC)C^{-1} \\ =& \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \\ & \pm\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pm1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ =& \pm\begin{pmatrix} \mp2+6 & \pm1-2 & \pm2 \\ \mp6+6 & \pm3-2 & \pm6-6 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \pm\begin{pmatrix} \mp2-6 & \pm1+2 & \pm2+4 \\ \mp6+6 & \pm3-2 & \pm6-6 \\ -9 & 3 & 7 \end{pmatrix} \cdots (Ans.1) \end{aligned}$$

（行列の括弧内のみ複合同順）

と，一見問題は解けたように見える．しかし，$C^{-1}BC$ の値は実はこれだけではない．たとえば，これ以外にも，

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

などがあり，一般には次のようになる．

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \pm\sqrt{1-bc} & b & 0 \\ c & \mp\sqrt{1-bc} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^2 \\ =& \begin{pmatrix} \pm\sqrt{1-bc} & b & 0 \\ c & \mp\sqrt{1-bc} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pm\sqrt{1-bc} & b & 0 \\ c & \mp\sqrt{1-bc} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B =& C(C^{-1}BC)C^{-1} \\ =& \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \pm\sqrt{1-bc} & b & 0 \\ c & \mp\sqrt{1-bc} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} \pm\sqrt{1-bc} & b & 2 \\ \pm3\sqrt{1-bc}-2c & 3b\pm2\sqrt{1-bc} & 0 \\ c & \mp\sqrt{1-bc} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} \mp2\sqrt{1-bc}-3b+6 & \pm\sqrt{1-bc}+b-2 & \pm2\sqrt{1-bc}+3b-4 \\ \mp12\sqrt{1-bc}-9b & \pm5\sqrt{1-bc}+3b & \pm12\sqrt{1-bc}+9b \\ \pm3\sqrt{1-bc}-2c+6 & \mp\sqrt{1-bc}+c-2 & \mp3\sqrt{1-bc}+2c-4 \end{pmatrix} \cdots (Ans.2) \end{aligned}$$

といくらでもある．

## 0.2　三次の場合

この問題を解決するために，3 次の正方行列をブロック分割し，

$$A = \begin{pmatrix} B & \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} & e \end{pmatrix}$$

とおき，

$$A^2 = \begin{pmatrix} E & O \\ O & 4 \end{pmatrix}$$

を解いてみよう．

$$\begin{pmatrix} B & \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & O \\ O & 4 \end{pmatrix}$$

より，

$$\begin{cases} B^2 + \boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = E \cdots (1) \\ B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}e = O \cdots (2) \\ \boldsymbol{y}B + e\boldsymbol{y} = O \cdots (3) \\ \boldsymbol{y}\boldsymbol{x} + e^2 = 4 \quad \cdots (4) \end{cases}$$

$\boldsymbol{x} = O$ かつ $\boldsymbol{y} = O$ の場合はすでに解けているので，ここでは問題にしない．$\boldsymbol{x} \neq O$ あるいは $\boldsymbol{y} \neq O$ となる解があるか．あればそれはどのような解かということを問題にする．

今仮に $\boldsymbol{y} = O$ とすると，この連立行列方程式は，

$$\begin{cases} B^2 = E \\ (B \pm 2E)\boldsymbol{x} = O \end{cases}$$

$B$ が対角行列の場合（$B = \pm 2E$ の場合をのぞくが，この場合は上の式よりありえない）は，$\boldsymbol{x} = O$ 以外に解は無い．

それ以外では，$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ とすると，この連立行列方程式が $\boldsymbol{x} \neq O$ で解をもつためには

$$\begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ (4 + a)(4 - a) = bc \end{cases}$$

でなければならないが，

$$16 - a^2 = bc \to 16 = 1$$

となり，解は無い．つまり，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ のうち片方のみが $O$ ということは無く，あと，残ったのは $\boldsymbol{x} \neq O$ かつ $\boldsymbol{y} \neq O$ という可能性のみである．

(2) の左から $\boldsymbol{y}$ をかけ，(3) の右から $\boldsymbol{x}$ をかけると，

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}B\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\boldsymbol{x}e = O \cdots (2)' \\ \boldsymbol{y}B\boldsymbol{x} + e\boldsymbol{y}\boldsymbol{x} = O \cdots (3)' \end{cases}$$

と同一の式になるから，この 2 式は同時に成り立つと考えてよい．（いまひとつ不確かであるが条件をカットしたわけではないのでこのまま進む．この部分，後に不要になると思われる．）

(1) の右から $\boldsymbol{x}$ をかけると，

$$B^2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}\boldsymbol{y}\boldsymbol{x} = E\boldsymbol{x} \cdots (1)'$$

(4) より，

$$B^2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}(4 - e^2) = E\boldsymbol{x}$$
$$B^2\boldsymbol{x} + (4 - e^2)E\boldsymbol{x} = E\boldsymbol{x}$$
$$B^2\boldsymbol{x} + (3 - e^2)E\boldsymbol{x} = O \cdots (5)$$

また，(2) の左から $\boldsymbol{B}$ をかけると，

$$\begin{aligned} &B^2x + Bxe = O \\ &B^2x + eBx = O \cdots (6) \end{aligned}$$

(5)，(6) より，

$$\begin{aligned} eBx &= (3-e^2)Ex \\ eBx - (3-e^2)Ex &= O \\ \{eB - (3-e^2)E\}x &= O \end{aligned}$$

明らかに，$e \neq 0$ なので，（といっても証明が必要か．後述）

$$\begin{aligned} eBx &= (3-e^2)Ex \\ eBx - (3-e^2)Ex &= O \\ Bx &= \left(\frac{3}{e} - e\right)x \cdots (7) \end{aligned}$$

ちょっと待てよ，って具合で $B = O$ という解があるかを調べたら，無かった．

(2)，(7) が $x \neq O$ で解をもつには，

$$-e = \frac{3}{e} - e$$

が成り立つことが必要であるが，成り立つことはない．

よって，$x \neq O$ あるいは $y \neq O$ となることはない．つまり，これらのことから，問題 (2) の解は (Ans.1) および，(Ans.2) ですべてである．

$e \neq 0$ の証明．

$e = 0$ とすると，

$$\begin{cases} B^2 + xy = E \cdots (1) \\ Bx = O \qquad \cdots (2) \\ yB = O \qquad \cdots (3) \\ yx = 4 \qquad \cdots (4) \end{cases}$$

(2),(3) より，

$$yB^2x = O \cdots (5)$$

(1),(5) より，

$$\begin{aligned} y(E - xy)x &= 0 \\ yx - yxyx &= 0 \\ 4 - 16 &= 0 \end{aligned}$$

となり，矛盾するので，$e \neq 0$

上記 (4) 式の 4 を定数 $k$ に変えることにより，対角成分のうち 2 つが等しい場合について求めることができる．（ハズ）

## 0.3　対角成分が全て異なる場合

ケーリー・ハミルトンの定理に再登場願うと，

$$A^3 + \alpha A^2 + \beta A + \gamma E = O \tag{2}$$

ここで $A^2 = T$（対角行列）とおくと，$A^3 = AT = TA$ であることに注意すれば，

$$A(T + \beta E) = (T + \beta E)A = -\alpha T - \gamma E \cdots (*)$$

となる．$T$ の条件から、$T + \beta E$ も対角行列なので，これの対角成分を左上から $t_1, t_2, t_3 (i \neq j \Rightarrow t_i \neq t_j)$ とおく．また，A の i 行 j 列成分を $a_{ij}$ とおく．すると、(*) 式各辺の任意の非対角成分（$i \neq j$）について，最右辺も対角行列であることから，

$$a_{ij}t_j = t_i a_{ij} = 0$$

となる．

$$\begin{pmatrix} \cdot & * & \cdot \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_1 & \cdot & \\ & t_2 & \\ & \cdot & t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & \cdot & \cdot \\ & t_2 & \\ & & t_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & * & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \# & 0 & \\ & \# & \\ & & \# \end{pmatrix}$$

$t_i \neq t_j$ であったので（$t_i, t_j$ のどちらかが 0 でも）$a_{ij} = 0$ が得られ，$A$ は対角行列であるとわかる．

（参考）一般に $n$ 次行列でも、ケーリー・ハミルトンの定理の $A$ の $n$ 次式から $A^2 = T$ によって $A$ の 2 次以上の項を消すと、

$$A \cdot g(T) = g(T) \cdot A = h(T) \ldots (**)$$

の形の式が成立する．$g(T)$ と $h(T)$ は $T$ の多項式で，$T$ が対角行列なので $g(T)$ 及び $h(T)$ も対角行列である．よって，上述の 3 次の場合と同様に (**) 式の非対角成分の値を比較することで，$A$ が対角行列であることを示せる．（めでたしめでたし）

## 0.4　三次の三乗の場合

$$A^3 = T$$

と置く．ケーリー・ハミルトンの定理より，

$$\alpha A^2 + \beta A = -\gamma E - T$$
$$\alpha\beta A^2 + \beta^2 A = -\beta\gamma E - \beta T \cdots (1)$$

また，ケーリー．ハミルトンの定理を $A$ 倍して，

$$A^4 + \alpha A^3 + \beta A^2 + \gamma A = O$$

であることに注意すれば，

$$AT + \alpha T + \beta A^2 + \gamma A = O \text{ かつ，} TA + \alpha T + \beta A^2 + \gamma A = O$$
$$\beta A^2 + \gamma A = -AT - \alpha T \text{ かつ，} \beta A^2 + \gamma A = -TA - \alpha T$$
$$\alpha\beta A^2 + \beta\gamma A = -\alpha AT - \alpha^2 T \text{ かつ，} \alpha\beta A^2 + \alpha\gamma A = -\alpha TA - \alpha^2 T \ldots (2)$$

$(1) - (2)$ より，

$$(\beta^2 - \beta\gamma)A = \alpha AT + \alpha^2 T - \beta\gamma E - \beta T = \alpha TA + \alpha^2 T - \beta\gamma E - \beta T$$
$$A(\alpha T - \beta(\beta - \gamma)E) = (\alpha T - \beta(\beta - \gamma)E)A = -\alpha^2 T + \beta\gamma E + \beta T$$

$\alpha \neq 0$ であれば，$\alpha T - \beta(\beta-\gamma)E \neq 0$ であるので (**) と同様のことが言え，$A$ は対角行列である．

　$\alpha = 0$ は $Tr(A) = 0$ を意味する．この場合でも $\beta(\beta-\gamma) \neq 0$ であれば，$A$ は対角行列であると言えるが，そうでない場合はどうであろうか．

　$\alpha = 0$ かつ $\beta = 0$ は (2) よりありえない．残る可能性は $\alpha = 0$ かつ $\beta = \gamma \neq 0$ のみである．

　(2) に戻って，

$$\beta A = -\beta E - T$$
$$A = -E - \frac{1}{\beta}T$$

これは $A$ が対角行列であることを示している．よってこの命題も正しい．

## 0.5　四次あるいは四乗以上の場合

　この方法は，2 乗や 3 乗の対角成分が全て異なる場合に用いたが，一部分同じ成分が続いている場合で，ブロック対角行列になるという証明にも使える．

　また，3 乗以上，あるいは 3 次以上の場合でも，(**) に帰着できれば対角行列であることが言える．その場合，$TA$ あるいは $AT$ の係数として 0 が登場すると，話はやや複雑である．また，$AT$=$TA$ の性質を使わなくても，整理後の $T$ の対角成分が 0 でなければ $A$ が対角行列であると言うことができる．全てをここに記述するのは不可能と思われるので道筋だけ示して終わる．

## 0.6　ケーリー・ハミルトンの定理の証明

　ケーリー・ハミルトンの定理の証明はそれほど容易ではない．ただ，複素行列を認めてしまえば簡単である．

　$A \in M(n;C)$ の固有値を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ とすると，$A$ の固有多項式 $f(x)$ は，

$$f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

$f(x)$ に $A$ を代入することを許して，行列の関数を考えると，

$$f(A) = (A-\alpha_1 E)(A-\alpha_2 E)\cdots(A-\alpha_n E)$$

である．ここで，

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & * \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

となる正則行列 $P$ をとると，この $P$ に対し，

$$
\begin{aligned}
P^{-1}f(A)P &= P^{-1}(A-\alpha_1E)(A-\alpha_2E)\cdots(A-\alpha_nE)P \\
&= P^{-1}(A-\alpha_1E)PP^{-1}(A-\alpha_2E)P\cdots P^{-1}(A-\alpha_nE)P \\
&= (P^{-1}AP-\alpha_1E)(P^{-1}AP-\alpha_2E)\cdots(P^{-1}AP-\alpha_nE) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & \alpha_2 & & \text{\huge$*$} \\ \text{\huge 0} & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & 0 & & \text{\huge$*$} \\ \text{\huge 0} & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \text{\huge$*$} \\ \text{\huge 0} & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = O \\
\therefore f(A) &= O
\end{aligned}
$$

$A$ が実行列の場合も途中で出てくる計算で複素行列を使えば特に問題はない．その場合でも展開した場合には実数係数の多項式となる．