シンプレックス法

線形計画法問題を解くときに図形的に解く方法は 2 次元が精一杯で，変数が 3 つ以上になると通用しない．この種の問題の解法としてシンプレックス法（単一化法）という方法が一般的である．この方法の原理は n 次元の凸多角形（凸面体）の辺をより良い条件の方向にたどって行って最後はこれ以上行く場所がないというところで終わるという仕組みである．理屈抜きで手順の概略だけを示す．

問題 1

$$\begin{cases} 2x+3y+3z \leqslant 50 \\ 8x+13y+9z \leqslant 157 \\ 12x+9y+8z \leqslant 144 \\ 9x+12y+13z \leqslant 192 \\ x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0 \end{cases}$$

という条件のもとで，$8x+7y+6z$ の最大値を求めよ．

［解］ さて，不等式のままでは何かと不便なので，次のように等式にする．

$$\begin{cases} 2x+3y+3z+a=50 & (1) \\ 8x+13y+9z+b=157 & (2) \\ 12x+9y+8z+c=144 & (3) \\ 9x+12y+13z+d=192 & (4) \\ 8x+7y+6z=M & (\mathrm{M}) \end{cases}$$

文字は全て正．a, b, c, d はスラック変数と言う．式 (M) の係数を見ると，x, y, z の順に係数が大きいので，この順番に消去していく．最初は x に着目する．

(1) より $x \leqslant 25$，(2) より $x \leqslant 19.625$，(3) より $\boxed{x \leqslant 12}$，(4) より $x \leqslant 21.\cdots$

12 が最も小さいので，(3) の式を使って，ほかの式と組合せて，x を消去する．

(1)，(3) より，

$$9y+10z+6a-c=156 \tag{1$'$}$$

(2)，(3) より，

$$21y+11z+3b-2c=183 \tag{2$'$}$$

(4)，(3) より，

$$21y+28z+4d-3c=336 \tag{4$'$}$$

(M)，(3) より，

$$3y+2z-2c=3M-288 \tag{$M$$'$}$$

仮に $c=0$ とすれば，$(1)'$ より $y \leqslant 17.3\cdots$，$(2)'$ より $\boxed{y \leqslant 8.71\cdots}$ ，$(4)'$ より $y \leqslant 16$

$y \leqslant 7.4\cdots$ が最も小さいので，$(2)'$ の式を使って，y を消去する．

$(1)'$，$(2)'$ より，

$$37z+42a-9b-c=543 \tag{1$''$}$$

(2)′，(4)′ より，

$$17z + 4d - 3b - c + 6d = 153 \tag{4''}$$

(2)′，(M)′ より，

$$3z - 3b - 12c = 21M - 2199 \tag{M''}$$

仮に $b = c = 0$ とすれば，(1)″ より $z \leqslant 14.6\cdots$，(4)″ より $\boxed{z \leqslant 9\cdots}$

9 の方が小さいので，(4)″ と (M)″ から z を消去する．(つまり (2)″ は結局使わない)

$$357M = 37842 - 42b - 201c - 12d$$
$$\therefore M \leqslant \frac{37842}{357} = 106$$

つまり，求める最大値は 106 で，最大となる条件は $b = c = d = 0$ なので，順に遡って，x, y, z を求めると，最大になる条件は,

$$(x, y, z) = (3, 4, 9) \cdots Ans.$$

ためしに，一番最初の不等式に代入すると確かに成り立っていることがわかる．

面倒にみえるが，要は連立方程式の解法と計算自体はほとんど同じなので，コンピュータの得意とするところである．割合簡単なプログラムで計算できる．

参考文献

[1] 片桐重延ほか『コンピュータのための線形解析』（東京電機大学）

[2] 木戸睦彦ほか『線形計画法』（培風館）